DISCIPLINA

Métodos Matemáticos Aplicados a Processos Químicos e Bioquímicos

Capítulo II : Autovalores, Autovetores e Formas Quadráticas

José Luiz de Medeiros e Ofélia Q.F. Araújo
Engenharia Química – UFRJ
jlm@eq.ufrj.br, ofelia@eq.ufrj.br
Tel. 21-2562-7535

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo : *n* Equações em *n* Variáveis

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}} : n \, x \, n \\ \underline{X} : n \, x 1 \end{cases}$$

O SQH tem, obviamente, a Solução Trivial $\underline{X} = \underline{0}$
Todavia, Temos Interesse apenas na Possibilidade de Soluções Não-Triviais, para as quais $\underline{X} \neq \underline{0}$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.1**

$\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, ... , $\underline{A}_m$ L.I. e Tem-se $\underline{B}$ com Posto($[\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \dots \ \underline{A}_m \ \underline{B}]$)=*m*, Então :

$$[\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \dots \ \underline{A}_m]\underline{X} = \underline{B} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \underline{A}_i X_i = \underline{B}$$

Tem Solução $\underline{X}$ Única

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.1**

$\underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \ldots , \underline{A}_m$ L.I. e Tem-se $\underline{B}$ com *Posto*$([\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \ldots \ \underline{A}_m \ \underline{B}])=m$, Então :

$$[\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \ldots \ \underline{A}_m]\underline{X} = \underline{B} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \underline{A}_i X_i = \underline{B}$$

Tem Solução $\underline{X}$ Única

Demonstração

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{A}_i X_i = \underline{B} \ \textit{Tem Sol. pois } Posto(\underline{\underline{A}} = [\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \ldots \ \underline{A}_n]) = p = Posto([\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \ldots \ \underline{A}_n \ \underline{B}])$$

A Sol. é Única. Admita que há Duas Soluções Diferentes $\underline{X}_1 \neq \underline{X}_2$ *Então :*

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\underline{X}_1 = \underline{B} \\ \underline{\underline{A}}\underline{X}_2 = \underline{B} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A}}(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) = \underline{0} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{\alpha} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \underline{A}_i \alpha_i = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0} \ \ \{ \ \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n \ L.I.$$

$$Assim \ \underline{X}_1 - \underline{X}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{X}_1 = \underline{X}_2 \ \ (i.e. \textit{ Só Há Uma Sol.})$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.2**

O SQH tem Solução Não-Trivial $\underline{X} \neq \underline{0}$ *Se e Somente Se* sua Matriz é Singular.

Demonstração

$$A \text{ se e somente se } B \begin{cases} A \text{ se } B \\ A \text{ somente se } B \end{cases}$$

B* é Suficiente para *A

B* é Necessário para *A

$$\begin{cases} A \text{ se } B & : B \Rightarrow A \\ A \text{ somente se } B & : A \Rightarrow B \end{cases}$$

B* é Suficiente para *A

B* é Necessário para *A

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.2**

O SQH tem Solução Não-Trivial $\underline{X} \neq \underline{0}$ *Se e Somente Se* sua Matriz é Singular.

Demonstração

$$A \text{ se e somente se } B \begin{cases} A \text{ se } B \\ A \text{ somente se } B \end{cases}$$

_B_ é Suficiente para _A_

_B_ é Necessário para _A_

$$\begin{cases} A \text{ se } B & : B \Rightarrow A \\ A \text{ somente se } B & : A \Rightarrow B \end{cases}$$

_B_ é Suficiente para _A_

_B_ é Necessário para _A_

$$A \text{ se e somente se } B \begin{cases} B \Rightarrow A \\ A \Rightarrow B \end{cases}$$

$$A \text{ se e somente se } B \; : \; A \Leftrightarrow B$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.2**

O SQH tem Solução Não-Trivial $\underline{X} \neq \underline{0}$ *Se e Somente Se* sua Matriz é Singular.

Demonstração

Suficiência $\underline{\underline{A}}\ Singular \Rightarrow \exists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0}$

Necessidade $\underline{\underline{A}}\ Não\ Singular \Rightarrow \nexists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0}$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.2**

O SQH tem Solução Não-Trivial $\underline{X} \neq \underline{0}$ *Se e Somente Se* sua Matriz é Singular.

Demonstração

Suficiência $\underline{\underline{A}}\ Singular \Rightarrow \exists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}$

$$\underline{\underline{A}}\ Singular \Rightarrow Posto(\underline{\underline{A}}) = p < n \Rightarrow \underline{A}_1,\ \underline{A}_2,\ \ldots\ \underline{A}_n\ \ São\ L.D.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \sum_{i=1}^{n} \underline{A}_i X_i = \underline{0}\ \ pode\ ser\ obtido\ com\ \underline{X} \neq \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\ Singular \Rightarrow \exists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.2**

O SQH tem Solução Não-Trivial $\underline{X} \neq \underline{0}$ *Se e Somente Se* sua Matriz é Singular.

Demonstração

Necessidade $\underline{\underline{A}}\ Não\ Singular \Rightarrow \nexists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0}$

$$\underline{\underline{A}}\ Não\ Singular \Rightarrow Posto(\underline{\underline{A}}) = Posto([\underline{\underline{A}}\ \underline{0}]) = p = n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0}\ Tem\ Sol.\ Única\ (i.e.\ com\ n - p = 0\ G.L.)$$

$$\Rightarrow Como\ \underline{X} = \underline{0}\ é\ Sempre\ Sol.\ ,\ \underline{X} = \underline{0}\ é\ Única$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\ Não\ Sing. \Rightarrow \nexists\ \underline{X} \neq \underline{0}\ com\ \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.3**

SQH com $D_A \neq 0$, só possui a Solução Trivial $\underline{X} = \underline{0}$

Demonstração

$$D_A \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\ \textit{Não Singular} \Rightarrow Posto(\underline{\underline{A}}) = Posto([\underline{\underline{A}}\ \underline{0}]) = p = n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}\ \textit{Tem Sol. Única (i.e. com } n - p = 0\ \textit{G.L.)}$$

$$\Rightarrow \textit{Como } \underline{X} = \underline{0}\ \textit{é Sempre Sol. ,}\ \underline{X} = \underline{0}\ \textit{é Única}$$

$$\Rightarrow DET(\underline{\underline{A}}) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}\ \textit{apenas para}\ \underline{X} = \underline{0}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.4**

SQH com *Posto(A)=n-1*, tem Solução Completa $\underline{X} = \beta.\underline{S}$ onde β é Constante Arbitrária

Demonstração

$$Posto(\underline{\underline{A}} = [\underline{A}_1 \quad \cdots \quad \underline{A}_{n-1} \quad \underline{A}_n]) = p = n-1 \Rightarrow Posto([\underline{\underline{A}}\underline{0}]) = n-1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{0} \; Tem \; Sol. a \; n-p = 1 \; G.L.$$

$$Posto(\underline{\underline{A}}) = p = n-1 \Rightarrow \underline{\underline{A}} \; Tem \; n-1 \; Cols \; L.I. \; e \; 1 \; Col \; L.D. \; ; \; Seja \; \underline{A}_n \; a \; Col. \; L.D.$$

$$\underline{A}_n \; pode \; ser \; colocado \; como \; \underline{A}_n = \sum_{i=1}^{n-1} V_i \underline{A}_i \quad (Pelo \; Teor. \; 2.1, \; \underline{V} \; é \; único). \; Assim$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \underline{A}_i X_i + \underline{A}_n X_n = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \underline{A}_i X_i = -\underline{A}_n X_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \underline{A}_i X_i = -\sum_{i=1}^{n-1} V_i \underline{A}_i X_n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (X_i + X_n V_i) \underline{A}_i = \underline{0} \Rightarrow X_i = -X_n V_i \Rightarrow com \; X_n = -\beta, \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ -1 \end{bmatrix} = \beta \underline{S}$$

Por que ?

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.5**

SQH com *Posto(A)=n-1*, a Solução Completa é constante vezes o vetor de cofatores de Q.Q. linha com ao menos um cofator ≠ 0

Demonstração

Pelo Teor. 2.4, a Sol. Completa é $\underline{X} = \beta.\underline{S}$ onde β é Constante Arbitrária e $\underline{S}$ é um vetor específico. Como *Posto(A)=n-1*, $D_A=0$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}\big|_1^T \\ \underline{\Omega}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{\Omega}\big|_n^T \end{bmatrix} \quad \underline{\Omega}\big|_k^T \text{ vetor cofatores } (\neq \underline{0}^T) \text{ de } \underline{A}\big|_k^T;\ \text{Então } \underline{\underline{A}}\underline{\Omega}\big|_k = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{\Omega}\big|_k \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_k^T \underline{\Omega}\big|_k \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{\Omega}\big|_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ D_A \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega}\big|_k \text{ define a direção de Sol. do SQH} \Rightarrow \underline{X} = \beta\underline{\Omega}\big|_k \text{ (Sol. Completa SQH)}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n* **Teorema 2.5**

SQH com *Posto(A)=n-1*, a Solução Completa é constante vezes o vetor de cofatores de Q.Q. linha com ao menos um cofator ≠ 0

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \textit{Usamos} \ \underline{X} = \beta \underline{\Omega}\big|_1 = \beta \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{12} \\ \Omega_{13} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 3, \quad \Omega_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad \Omega_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3$$

$$\textit{Dando} \quad \underline{X} = \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Sistema Quadrado Homogêneo *n x n*

Solução Completa do SQH pode ser Obtida pela Estratégia Geral de Pivotamento e Análise de Sistemas Lineares.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
1. Sistema Quadrado Homogêneo (SQH)

Exemplo

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\5 & 7 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Tableau Aumentado

$$\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\4 & 5 & 6 & 0\\5 & 7 & 9 & 0\end{array}$$

Pivô 1 (Normalizado)

$$\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & -3 & -6 & 0\\0 & -3 & -6 & 0\end{array}$$

Normaliza Pivô 2

$$\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & -3 & -6 & 0\end{array}$$

Pivô 2

$$\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Pivô 3 Nulo : Fim

$$Posto(\underline{\underline{A}}) = 2 = Posto([\underline{\underline{A}}\ \underline{0}])$$

Sol. tem $3-2=1$ *G.L.* (X_3)

$$X_3=\beta \Rightarrow \begin{cases}X_2=-2\beta\\X_1=\beta\end{cases}$$

Sol. Completa

$$\underline{X}=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Sejam $\underline{\underline{A}}\ (n \times n)\ ,\ \underline{X}\ (n \times 1),\ \underline{Y}\ (n \times 1)$

$Q(\underline{X})$ *é uma Forma Quadrática Quando* $Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j$

$F(\underline{X},\underline{Y})$ *é uma Forma Bilinear Quando* $F(\underline{X},\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i Y_j$

$\underline{\underline{A}}\quad (n \times n)$ — **Matriz da Forma Quadrática**

$\underline{X}\quad (n \times 1)$ — **Variáveis da Forma Quadrática**

$\underline{Y},\ \underline{X}\ (n \times 1)$ — **Variáveis da Forma Bilinear**

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Sejam $\underline{\underline{A}}\ (n\ x\ n)\ ,\ \underline{X}\ (n\ x\ 1)$

$Q(\underline{X})$ *é uma Forma Quadrática Quando* $Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j$

$$Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=}^{n} A_{ij} X_i X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j} X_j \\ \sum_{j=1}^{n} A_{2j} X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{nj} X_j \end{bmatrix}$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{X}\right) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X}$$

$$Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{X}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Sejam $\underline{\underline{A}}\ (n \times n)$, $\underline{X}\ (n \times 1)$, $\underline{Y}\ (n \times 1)$

$F(\underline{X},\underline{Y})$ *é uma Forma Bilinear Quando* $F(\underline{X},\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i Y_j$

$$F(\underline{X},\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i Y_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij} Y_j = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j} Y_j = \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{nj} Y_j = \end{bmatrix}$$

$$F(\underline{X},\underline{Y}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\underline{Y} = \underline{Y}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{X}$$

Note que, em geral

$$F(\underline{X},\underline{Y}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\underline{Y} = \underline{Y}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{X} \neq F(\underline{Y},\underline{X}) = \underline{Y}^T \underline{\underline{A}}\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}$$

Toda FQ é Idêntica a uma FQ com Matriz Simétrica   Teorema 2.6

Demonstração

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X}$$

$$Como\ \ Q(\underline{X}) = Q(\underline{X})^T \Rightarrow Q(\underline{X}) = \frac{Q(\underline{X}) + Q(\underline{X})^T}{2}$$

$$Q(\underline{X}) = \frac{\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + (\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X})^T}{2} = \frac{\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{X}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{X}}{2}$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \left(\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \right) \underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}\ ,\ \underline{\underline{M}} = \left(\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \right)\ \ Simétrica,\ \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}\ ,\ \underline{\underline{M}}\ \ Simétrica$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Toda FQ é Idêntica a uma FQ com Matriz Simétrica   Teorema 2.6

Demonstração

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X}$$

$$Como\ \ Q(\underline{X}) = Q(\underline{X})^T \Rightarrow Q(\underline{X}) = \frac{Q(\underline{X}) + Q(\underline{X})^T}{2}$$

$$Q(\underline{X}) = \frac{\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + (\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X})^T}{2} = \frac{\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{X}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{X}}{2}$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \left(\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \right) \underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}\ ,\ \underline{\underline{M}} = \left(\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \right)\ \ Simétrica,\ \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}\ ,\ \underline{\underline{M}}\ \ Simétrica$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Toda FQ é Idêntica a uma FQ com Matriz Simétrica Teorema 2.6

Devido ao Teor. 2.6, deste Ponto em Diante só Consideramos FQs com Matrizes Simétricas, pois :

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}$$

$$\underline{\underline{M}} = \left(\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \right) \quad Simétrica$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Classificação de Formas Quadráticas Definição 2.1

$$Seja\ Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} \quad \underline{\underline{M}}\ simétrica\ n\,x\,n\ real,\ \underline{X} = \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X}) = 0$$

1 $$Q(\underline{X}) > 0 \wedge \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Positiva - Definida\ (PD)$$

2 $$Q(\underline{X}) \geq 0 \wedge \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Positiva - Semidefinida\ (PSD)$$
$$(Q(\underline{X}) = 0\ \ para\ algum\ \underline{X} \neq \underline{0})$$

3 $$Q(\underline{X}) < 0 \wedge \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Negativa - Definida\ (ND)$$

4 $$Q(\underline{X}) \leq 0 \wedge \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Negativa - Semidefinida\ (NSD)$$
$$(Q(\underline{X}) = 0\ \ para\ algum\ \underline{X} \neq \underline{0})$$

5 $$\left.\begin{array}{l} Q(\underline{X}) > 0 \\ Q(\underline{X}) < 0 \\ Q(\underline{X}) = 0 \end{array}\right\} \wedge \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Indefinida$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Seja $Q(\underline{X})$ Definida (PD ou ND), Então $D_M \neq 0$ **Teorema 2.7**

Demonstração

$$Admita\ Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}\ \ Definida\ com\ DET(\underline{\underline{M}}) = 0$$

$$Assim\ \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \underline{0}\ ocorre\ \ para\ \underline{X}^* \neq \underline{0}\ (SQH)$$

$$Em\ Q(\underline{X}^*) = \underline{X}^{*T} \underline{\underline{M}}\,\underline{X}^* = 0 \Rightarrow Absurdo\ \ pois\ Q(\underline{X})\ é\ \ Definida$$

$$Logo,\ Q(\underline{X})\ Definida \Rightarrow \underline{\underline{M}}\ \ Não-Singular\ (D_M \neq 0)$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Condição Necessária e Suficiente para *$Q(\underline{X})$* PD (ND) Teorema 2.8

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} \; , \; \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \cdots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

Quantidades abaixo todas Positivas (Alternem Sinal com $M_{11}<0$)

$$M_{11}, \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}, \ldots , \; \left|\underline{\underline{M}}\right|$$

Vetores Ortogonais e Conjugados — Definição 2.2

$\underline{X}, \underline{Y}$ Vetores $n \times 1$, $\underline{X} \neq \underline{0}, \underline{Y} \neq \underline{0}$

$\underline{\underline{M}}$ Simétrica, PD, $n \times n$ real

$$\underline{X}^T \underline{Y} = \underline{Y}^T \underline{X} = 0$$
$$\left(\underline{X}^T \underline{X} > 0,\ \underline{Y}^T \underline{Y} > 0\right)$$

$\underline{X}, \underline{Y}$ São Ortogonais

$$\underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{Y} = \underline{Y}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = 0$$
$$\left(\underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} > 0,\ \underline{Y}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{Y} > 0\right)$$

$\underline{X}, \underline{Y}$ São Conjugados por M

$\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, ..., $\underline{U}_n$ São *n* Vetores Mutuamente Ortogonais, Então Eles São L.I. **Teorema 2.9**

Demonstração

$$\underline{U}_1 \perp \underline{U}_2 \perp \underline{U}_3 \perp \cdots \perp \underline{U}_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_i^T \underline{U}_j = 0 \ (i \neq j) \\ \underline{U}_i^T \underline{U}_i \neq 0 \end{cases}$$

$$Para\ Serem\ L.I.\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_i = \underline{0}\ só\ para\ \underline{\alpha} = \underline{0}$$

$$Admita\ \underline{U}_1, \cdots, \underline{U}_n \perp e\ L.D.;\ i.e.\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_i = \underline{0}\ com\ \underline{\alpha} \neq \underline{0}$$

$$Premult.\ \underline{U}_k^T \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_k^T \underline{U}_i = 0 \Rightarrow \alpha_k \underline{U}_k^T \underline{U}_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

$$Repetindo\ para\ k = 1..n \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}\ [\ Absurdo, Vetores\ são\ L.I.]$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

$\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, ..., $\underline{U}_n$ São *n* Vetores Mutuamente Conjugados por *M* Simétrica e P.D. *n x n*. Então Eles São L.I. **Teorema 2.10**

Demonstração

$$\underline{U}_1, \underline{U}_2, \cdots \underline{U}_n \ \text{Conjugados por} \ \underline{\underline{M}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_j = 0 \ (i \neq j) \\ \underline{U}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_i > 0 \end{cases}$$

$$\text{Para Serem L.I.} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_i = \underline{0} \ \text{só para} \ \underline{\alpha} = \underline{0}$$

$$\text{Admita} \ \underline{U}_1, \cdots, \underline{U}_n \ \text{L.D.; i.e.} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_i = \underline{0} \ \text{com} \ \underline{\alpha} \neq \underline{0}$$

$$\text{Premult.} \ \underline{U}_k^T \underline{\underline{M}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{U}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_i = 0 \Rightarrow \alpha_k \underline{U}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

$$\text{Repetindo para} \ k = 1..n \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0} \ [\text{Absurdo, Vetores são L.I.}]$$

Construção de Base Ortogonal $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ de Vetores via Ortogonalização Schmidt — Teorema 2.11

Demonstração

$Com\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, \cdots \underline{W}_n\ L.I.,\ Produzir\ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \cdots \underline{P}_n\ Ortogonais\ com:$

$$
\begin{array}{l}
\underline{P}_1 = \underline{W}_1 \\
\underline{P}_2 = \underline{W}_2 + \alpha_{21}\underline{P}_1 \\
\underline{P}_3 = \underline{W}_3 + \alpha_{31}\underline{P}_1 + \alpha_{32}\underline{P}_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \\
\underline{P}_n = \underline{W}_n + \alpha_{n1}\underline{P}_1 + \alpha_{n2}\underline{P}_2 + \ldots \alpha_{nn-1}\underline{P}_{n-1}
\end{array}
$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Ortogonal $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, ..., $\underline{P}_n$ de Vetores via Ortogonalização Schmidt **Teorema 2.11**

Demonstração

$$Com\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, \cdots \underline{W}_n\ \ L.I.,\ Produzir\ \ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \cdots \underline{P}_n\ \ Ortogonais\ com:$$

$$\underline{P}_1 = \underline{W}_1$$

$$\underline{P}_2 = \underline{W}_2 + \alpha_{21}\underline{P}_1$$

$$\underline{P}_3 = \underline{W}_3 + \alpha_{31}\underline{P}_1 + \alpha_{32}\underline{P}_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots$$

$$\underline{P}_n = \underline{W}_n + \alpha_{n1}\underline{P}_1 + \alpha_{n2}\underline{P}_2 + \ldots \alpha_{nn-1}\underline{P}_{n-1}$$

Constantes α_{21}, α_{31}, ... α_{nn-1} calculadas de modo que $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, ..., $\underline{P}_n$ Sejam Mutuamente Ortogonais.

Construção de Base Ortogonal $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ de Vetores via Ortogonalização Schmidt Teorema 2.11

Demonstração

$$\underline{P}_1^T \underline{P}_2 = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{W}_2}{\underline{P}_1^T \underline{P}_1}$$

$$\underline{P}_1^T \underline{P}_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{W}_3}{\underline{P}_1^T \underline{P}_1} \;,\; \underline{P}_2^T \underline{P}_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{\underline{P}_2^T \underline{W}_3}{\underline{P}_2^T \underline{P}_2}$$

$$\underline{P}_1^T \underline{P}_4 = 0 \Rightarrow \alpha_{41} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{W}_4}{\underline{P}_1^T \underline{P}_1} \;,\; \underline{P}_2^T \underline{P}_4 = 0 \Rightarrow \alpha_{42} = -\frac{\underline{P}_2^T \underline{W}_4}{\underline{P}_2^T \underline{P}_2} \;\ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\underline{P}_1^T \underline{P}_n = 0 \Rightarrow \alpha_{n1} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{W}_n}{\underline{P}_1^T \underline{P}_1} \;,\; \ldots \;,\; \underline{P}_{n-1}^T \underline{P}_n = 0 \Rightarrow \alpha_{nn-1} = -\frac{\underline{P}_{n-1}^T \underline{W}_n}{\underline{P}_{n-1}^T \underline{P}_{n-1}}$$

Construção de Base Ortogonal $\underline{P}_1, \underline{P}_2, ..., \underline{P}_n$ de Vetores via Ortogonalização Schmidt Teorema 2.11

Demonstração

$$\text{Resumo do Processo Schmidt}:$$

$$Entrar\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, ..., \underline{W}_n\ ;\ Fazer\ \underline{P}_1 = \underline{W}_1$$

$$For\ k = 2...n$$

$$For\ i = 1...k-1$$

$$Calc.\ \alpha_{ki} = -\frac{\underline{P}_i^T \underline{W}_k}{\underline{P}_i^T \underline{P}_i}$$

$$End$$

$$Calc.\ \underline{P}_k = \underline{W}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} \underline{P}_i$$

$$End$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Ortogonal $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, ..., $\underline{P}_n$ de Vetores via Ortogonalização Schmidt **Teorema 2.11**

Ao Final, os Vetores da Base Ortogonal podem ser Normalizados

$$For \;\; k = 1 \ldots n$$

$$\underline{P}_k = \underline{P}_k \Big/ \left\| \underline{P}_k \right\|$$

$$End$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Conjugada $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, ..., $\underline{P}_n$ por Matriz Simétrica e Definida, via Processo Schmidt **Teorema 2.11b**

Demonstração

$$Com\ \underline{\underline{M}}\ Simétrica\ n\ x\ n,\ Definida;$$

$$Com\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, \cdots \underline{W}_n\ \ L.I.,$$

$$Produzir\ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \cdots \underline{P}_n\ \ Conjugados\ \ por\ \underline{\underline{M}}\ \ com:$$

$$\underline{P}_1 = \underline{W}_1$$

$$\underline{P}_2 = \underline{W}_2 + \alpha_{21}\underline{P}_1$$

$$\underline{P}_3 = \underline{W}_3 + \alpha_{31}\underline{P}_1 + \alpha_{32}\underline{P}_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots$$

$$\underline{P}_n = \underline{W}_n + \alpha_{n1}\underline{P}_1 + \alpha_{n2}\underline{P}_2 + \ldots \alpha_{nn-1}\underline{P}_{n-1}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Conjugada $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ por Matriz Simétrica e Definida, via Processo Schmidt Teorema 2.11b

Demonstração

$$Com\ \underline{\underline{M}}\ Simétrica\ n\ x\ n,\ Definida;$$

$$Com\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, \cdots \underline{W}_n\ L.I.,$$

$$Produzir\ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \cdots \underline{P}_n\ Conjugados\ por\ \underline{\underline{M}}\ com:$$

$$\begin{array}{l}
\underline{P}_1 = \underline{W}_1 \\
\underline{P}_2 = \underline{W}_2 + \alpha_{21}\underline{P}_1 \\
\underline{P}_3 = \underline{W}_3 + \alpha_{31}\underline{P}_1 + \alpha_{32}\underline{P}_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots \\
\underline{P}_n = \underline{W}_n + \alpha_{n1}\underline{P}_1 + \alpha_{n2}\underline{P}_2 + \ldots \alpha_{nn-1}\underline{P}_{n-1}
\end{array}$$

Constantes $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots\ \alpha_{nn-1}$ calculadas de modo que $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ Sejam Conjugados pela Matriz

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Conjugada $\underline{P}_1 , \underline{P}_2 , ..., \underline{P}_n$ por Matriz Simétrica e Definida, via Processo Schmidt Teorema 2.11b

Demonstração

$$\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_2 = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{W}_2}{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_1}$$

$$\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{W}_3}{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_1} \;,\; \underline{P}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{\underline{P}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{W}_3}{\underline{P}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_n = 0 \Rightarrow \alpha_{n1} = -\frac{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{W}_n}{\underline{P}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_1} \;,\; \ldots \;,\; \underline{P}_{n-1}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_n = 0 \Rightarrow \alpha_{nn-1} = -\frac{\underline{P}_{n-1}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{W}_n}{\underline{P}_{n-1}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{P}_{n-1}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Construção de Base Conjugada $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ por Matriz Simétrica e Definida, via Processo Schmidt **Teorema 2.11b**

Demonstração

$$\text{Resumo do Processo Schmidt para Base Conjugada:}$$

$$Entrar\ \underline{\underline{M}}\ , \underline{W}_1, \underline{W}_2, \ldots, \underline{W}_n\ ;\ Fazer\ \underline{P}_1 = \underline{W}_1$$

$$For\ k = 2 \ldots n$$

$$For\ i = 1 \ldots k-1$$

$$Calc.\ \alpha_{ki} = -\frac{\underline{P}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{W}_k}{\underline{P}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{P}_i}$$

$$End$$

$$Calc.\ \underline{P}_k = \underline{W}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} \underline{P}_i$$

$$End$$

Construção de Base Conjugada $\underline{P}_1, \underline{P}_2, ..., \underline{P}_n$ por Matriz Simétrica e Definida, via Processo Schmidt **Teorema 2.11b**

Ao Final, os Vetores da Base Conjugada podem ser Normalizados

$$For \;\; k = 1...n$$

$$\underline{P}_k = \underline{P}_k / \|\underline{P}_k\|$$

$$End$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência Teorema 2.12

A Transformação de uma Forma Quadrática Geral do tipo

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij} X_i X_j$$

Em uma FQ Diagonal de Mesmo Valor, do tipo

$$Q(\underline{X}) = \underline{Y}^T \underline{\underline{D}}\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} Y_i^2 \quad \{\underline{Y}(\underline{X})$$

É uma Maneira Rápida de Determinar o Caracter de uma FQ, Pois :

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência Teorema 2.12

1 $$D_{ii} > 0\ (i = 1...n) \Rightarrow Q(\underline{X}) > 0\ \ para\ \forall\ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ PD$$

2 $$D_{ii} \geq 0\ (i = 1...n) \Rightarrow Q(\underline{X}) \geq 0\ \ para\ \forall\ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ PSD$$
$$(D_{kk} = 0\ \ para\ algum\ k)$$

3 $$D_{ii} < 0\ (i = 1...n) \Rightarrow Q(\underline{X}) < 0\ \ para\ \forall\ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ ND$$

4 $$D_{ii} \leq 0\ (i = 1...n) \Rightarrow Q(\underline{X}) \leq 0\ \ para\ \forall\ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ NSD$$
$$(D_{kk} = 0\ \ para\ algum\ k)$$

5 $$\left.\begin{array}{l} Algum(ns)\ D_{ii} > 0 \\ Algum(ns)\ D_{ii} < 0 \\ Algum(ns)\ D_{ii} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(\underline{X}) \left\{\begin{array}{l} > 0 \\ = 0\ \ para\ \forall\ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow Q(\underline{X})\ Indefinida \\ < 0 \end{array}\right.$$

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência — Teorema 2.12

$$Seja\ \underline{\underline{M}}\ Simétrica\ \ n\,x\,n$$

$$Sejam\ \underline{U}_1, \underline{U}_2, ..., \underline{U}_n\ \ Vetores\ \ n\,x\,1\ \ Conjugados\ \ por\ \ \underline{\underline{M}}$$

$$\underline{U}_i^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{U}_j = 0\ \ (i \neq j),\ \ \underline{U}_i^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{U}_i \neq 0\ \ (i = j)$$

$$Seja\ a\ Matriz\ \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 & \underline{U}_2 & \cdots & \underline{U}_n \end{bmatrix}$$

$$Então\ a\ Transformação\ \underline{X} = \underline{\underline{U}}\,\underline{Y}\ \ Converte\ \ Q(\underline{X}) = \underline{X}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{X}$$

$$Em\ FQ\ Diagonal\ em\ \underline{Y} : Q(\underline{X}(\underline{Y})) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} Y_i^2$$

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência

Teorema 2.12

Demonstração

$$Como\ \underline{U}_1, \underline{U}_2, \ldots, \underline{U}_n\ \ São\ L.I.\ a\ Transformação\ é\ Inversível :$$

$$\underline{X} = \underline{\underline{U}}\,\underline{Y} \therefore \underline{Y} = \underline{\underline{U}}^{-1}\underline{X} \Rightarrow Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \underline{Y}^T \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{Y} = \underline{Y}^T \left[\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{U}}\right]\underline{Y}$$

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^T \\ \underline{U}_2^T \\ \vdots \\ \underline{U}_n^T \end{bmatrix} \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 & \underline{U}_2 & \cdots & \underline{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1 & \underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_2 & \cdots & \underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_n \\ \underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1 & \underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_2 & \cdots & \underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{U}_n^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1 & \underline{U}_n^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_2 & \cdots & \underline{U}_n^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_n \end{bmatrix}$$

$$Como\ os\ Vetores\ São\ Conjugados :\ \underline{U}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_j = 0\ (i \neq j)$$

$$Dando :$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência — Teorema 2.12

Demonstração

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \underline{Y}^T \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{Y} =$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{Y}^T \begin{bmatrix} \underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underline{U}_n^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_n \end{bmatrix} \underline{Y}$$

$$Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{U}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_i \right) Y_i^2 \qquad \{FQ\ Diagonalizada$$

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência

Teorema 2.12

Cálculo de $\underline{\underline{U}}$ *via Processo Schmidt para Base Conjugada*

Com Vetores Canônicos $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 & \cdots & \underline{I}_n \end{bmatrix}$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 + \alpha_{21}\underline{U}_1 \qquad \rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{I}_2}{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1}, \; \alpha_{31} = -\frac{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{I}_3}{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_1}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3 + \alpha_{31}\underline{U}_1 + \alpha_{32}\underline{U}_2 \qquad \alpha_{ki} = -\frac{\underline{U}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{I}_k}{\underline{U}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{U}_i} \;\; etc$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$$

$$\underline{U}_n = \underline{I}_n + \alpha_{n1}\underline{U}_1 + \alpha_{n2}\underline{U}_2 + \cdots + \alpha_{nn-1}\underline{U}_{n-1}$$

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência

Teorema 2.12

$$\begin{array}{l}
\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \\
\underline{U}_2 = \underline{I}_2 + \alpha_{21}\underline{U}_1 \\
\underline{U}_3 = \underline{I}_3 + \alpha_{31}\underline{U}_1 + \alpha_{32}\underline{U}_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \\
\underline{U}_n = \underline{I}_n + \alpha_{n1}\underline{U}_1 + \alpha_{n2}\underline{U}_2 + \cdots + \alpha_{nn-1}\underline{U}_{n-1}
\end{array}$$

$$\left[\underline{U}_1 \quad \underline{U}_2 \quad \cdots \quad \underline{U}_n\right] = \underline{\underline{I}} + \left[\underline{U}_1 \quad \underline{U}_2 \quad \cdots \quad \underline{U}_n\right]\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{n1} \\ 0 & 0 & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{43} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência Teorema 2.12

$$\underline{\underline{U}}\left\{\underline{\underline{I}}-\begin{bmatrix}0 & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{n1}\\ 0 & 0 & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \cdots & \alpha_{n2}\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{43} & \cdots & \alpha_{n3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\right\}=\underline{\underline{I}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência Teorema 2.12

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{21} & -\alpha_{31} & -\alpha_{41} & \cdots & -\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & -\alpha_{32} & -\alpha_{42} & \cdots & -\alpha_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_{43} & \cdots & -\alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -\alpha_{nn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência — Exemplo

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}$$

Diagonalizar $Q(\underline{X})$ com Transformação de Congruência.

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência Exemplo

Resolução :

Vetores L.I. para Processo Schmidt : Base Canônica

$$\underline{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 + \alpha_{21}\underline{U}_1$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3 + \alpha_{31}\underline{U}_1 + \alpha_{32}\underline{U}_2$$

$$\underline{U}_4 = \underline{I}_4 + \alpha_{41}\underline{U}_1 + \alpha_{42}\underline{U}_2 + \alpha_{43}\underline{U}_3$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência — Exemplo

$$\alpha_{21} = -\frac{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_2}{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_1} = -.75$$

$$\alpha_{31} = -\frac{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_3}{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_1} = -.5,\ \alpha_{32} = -\frac{\underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_3}{\underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_2} = -.909091$$

$$\alpha_{41} = -\frac{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_4}{\underline{U}_1^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_1} = -.25,\ \alpha_{42} = -\frac{\underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_4}{\underline{U}_2^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_2} = -.818181,\ \alpha_{43} = -\frac{\underline{U}_3^T \underline{\underline{M}}\, \underline{I}_4}{\underline{U}_3^T \underline{\underline{M}}\, \underline{U}_3} = -.926829$$

$$\underline{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{U}_2 = \begin{bmatrix} -.75 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{U}_3 = \begin{bmatrix} .181818 \\ -.909091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{U}_4 = \begin{bmatrix} -.25 \\ -.818181 \\ -.926829 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
2. Formas Quadráticas (FQ) e Formas Bilineares (FB)

Diagonalização de Forma Quadrática com Transformação de Congruência **Exemplo**

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -.75 & .181818 & -.25 \\ 0 & 1 & -.909091 & -.818181 \\ 0 & 0 & 1 & -.926829 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{U}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{U}_3^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{U}_4^T \underline{\underline{M}} \underline{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.727273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7073171 \end{bmatrix}$$

$$Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{4} D_{ii} Y_i^2 = 4Y_1^2 + 2.75Y_2^2 + 3.727273Y_3^2 + 2.7073171Y_4^2$$

$$Q(\underline{X}) \text{ é } Positiva - Definida.$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Considere a Matriz Quadrada Abaixo e o Vetor $\underline{X}$

$$\underline{\underline{A}}\ (n\,x\,n),\ \underline{X}\ \ (n\,x\,1)$$

É Razoável Questionar sob que Casos a Multiplicação da Matriz por $\underline{X}$ Produz Vetor Paralelo a $\underline{X}$:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \lambda \underline{X} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)\underline{X} = \underline{0} \qquad \boxed{1}$$

Em geral, Interessa Obter as Condições de Validade de (1) em Termos de $\underline{X}$ e de λ. Ora, a condição $\underline{X}=\underline{0}$ é Solução Trivial de (1), de modo que apenas buscamos Soluções $\underline{X} \neq \underline{0}$. O Sistema (1) é um SQH, que Terá Sols. Não Triviais Se e Somente Se:

$$DET\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0 \qquad \boxed{2}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

$$DET\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0 \qquad (2)$$

Esta Equação – Conhecida como Equação Característica – é um Polinômio de Grau *n* na Variável λ cujas *n* Raízes (pelo Teor. Fundamental da Álgebra) sempre existirão, sendo expressas como λ_1, λ_2, ... , λ_n. Esta Lista de Raízes Poderá Conter Números Reais (distintos ou repetidos, parcialmente ou não) e Números Complexos em Pares Conjugados (também com Repetição ou Não). Desta Forma a Eq. (2) Escreve-se:

$$DET\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0 \Leftrightarrow K(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\ldots(\lambda-\lambda_n) = 0 \qquad (3)$$

onde $K = (-1)^n$ *devido aos termos diagonais em* (2).

Fazendo as Multiplicações dos Fatores na Eq. (3), Resulta a Forma Polinomial em λ :

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

$$DET\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{I}}\right)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\ldots(\lambda-\lambda_n)=0 \quad (3)$$

$$DET\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{I}}\right)=(-1)^n\left\{\lambda^n-\beta_1\lambda^{n-1}+\beta_2\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\beta_{n-1}\lambda+(-1)^n\beta_n\right\}=0 \quad (4)$$

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ ,\quad \beta_2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_i\lambda_j\ ,\quad \beta_3=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k\ ,\ldots,\quad \beta_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

As *n* Raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os *Valores Característicos* ou *Autovalores* da Matriz *A*. Para λ igual a cada λ_i destes, o SQH Terá Solução Não Trivial $\underline{X}_i$ pois o Determinante D_A será Nulo. Estas Soluções são os chamados *Autovetores* ou *Vetores Característicos* da Matriz *A* . Com $\lambda=0$ na Eq. (4), Vem :

$$DET\left(\underline{\underline{A}}\right)=(-1)^{2n}\beta_n \Rightarrow \boxed{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=DET\left(\underline{\underline{A}}\right)}$$

***A* é Singular *(D_A=0)* se ao menos um dos Autovalores é Nulo.**

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Cálculo de Autovetores e Autovalores — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ Autovalores\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ Autovetores\ \underline{X}_1\ ,\ \underline{X}_2\ ,\ \underline{X}_3 \end{cases}$$

Cálculo de Autovetores e Autovalores — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução : Equação Característica e Busca de Autovalores

$$DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1) - (3 - \lambda - 2) + 2(1 + 2\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 3) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2 + \sqrt{7} \\ \lambda_3 &= 2 - \sqrt{7} \end{aligned}}$$

Cálculo de Autovetores e Autovalores — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução : Busca de Autovetores no SQH

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{X}_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda_1 & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \underline{X}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{X}_1 = 0 \quad \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Cálculo de Autovetores e Autovalores Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução : Busca de Autovetores no SQH

$$\lambda_2 = 2+\sqrt{7} \Rightarrow \underline{X}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda_2 & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \underline{X}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1-\sqrt{7} & 1 & 2 \\ 1 & -2-\sqrt{7} & 1 \\ 2 & 1 & 1-\sqrt{7} \end{bmatrix} \underline{X}_2 = 0$$

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2-\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{7} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\sqrt{7} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2-\sqrt{7} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} 4+\sqrt{7} \\ 1+\sqrt{7} \\ 5+2\sqrt{7} \end{bmatrix}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Cálculo de Autovetores e Autovalores — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução : Busca de Autovetores no SQH

$$\lambda_3 = 2 - \sqrt{7} \Rightarrow \underline{X}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda_3 & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda_3 \end{bmatrix} \underline{X}_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1+\sqrt{7} & 1 & 2 \\ 1 & -2+\sqrt{7} & 1 \\ 2 & 1 & 1+\sqrt{7} \end{bmatrix} \underline{X}_3 = 0$$

$$\underline{X}_3 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2+\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{7} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1+\sqrt{7} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2+\sqrt{7} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{X}_3 = \begin{bmatrix} 4-\sqrt{7} \\ 1-\sqrt{7} \\ 5-2\sqrt{7} \end{bmatrix}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Cálculo de Autovetores e Autovalores — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Correspondência de Autovalores e Autovetores

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2+\sqrt{7} \qquad \lambda_3 = 2-\sqrt{7}$$

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} 4+\sqrt{7} \\ 1+\sqrt{7} \\ 5+2\sqrt{7} \end{bmatrix} \qquad \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} 4-\sqrt{7} \\ 1-\sqrt{7} \\ 5-2\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A é matriz $(n \times n)$, então A e A^T têm a mesma Equação Característica **Teorema 2.13a**

Demonstração

$$Eq.\ Carac.\ para\ \underline{\underline{A}}\ :\ DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET((\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})^T) = DET(\underline{\underline{A}}^T - \lambda \underline{\underline{I}})$$

$$Logo\ \ DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{A}}^T - \lambda \underline{\underline{I}})$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A **é matriz *(n x n)*, então *A* e A^T têm a mesma Equação Característica** **Teorema 2.13a**

Demonstração

$$Eq.\ Carac.\ para\ \underline{\underline{A}}\ :\ DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET((\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})^T) = DET(\underline{\underline{A}}^T - \lambda \underline{\underline{I}})$$

$$Logo\ \ DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{A}}^T - \lambda \underline{\underline{I}})$$

A **é matriz *(n x n)*, então *A* e A^T têm os mesmos Autovalores.** **Corolário 2.13a.1**

Demonstração

$$DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{A}}^T - \lambda \underline{\underline{I}}) \Rightarrow polinômios\ com\ raízes\ (i.e.\ \lambda_1,...,\lambda_n)\ iguais.$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

***A* é matriz *(n x n)*, então os Autovetores de *A* são Ortogonais aos de A^T que correspondem a Autovalores Distintos. Teorema 2.13b**

Demonstração

$$Pelo\ Teor.\ 2.13a,\ \underline{\underline{A}}\ e\ \underline{\underline{A}}^T\ \ têm\ mesmos\ autovalores.$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j\ \ são\ \ i-ésimo\ e\ \ j-ésimo\ autovalores\ distintos\ de\ \underline{\underline{A}}\ e\ \underline{\underline{A}}^T$$

$$\underline{X}_i,\ \underline{X}_j,\ \underline{Y}_i,\ \underline{Y}_j\ \ são\ os\ respectivos\ autovetores\ de\ \underline{\underline{A}}\ e\ de\ \underline{\underline{A}}^T;\ isto\ é:$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_i = \lambda_i \underline{X}_i\ \ ,\ \ \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_j = \lambda_j \underline{X}_j\ \ ,\ \ \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_i = \lambda_i \underline{Y}_i\ \ ,\ \ \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_j = \lambda_j \underline{Y}_j$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A é matriz $(n \times n)$, então os Autovetores de A são Ortogonais aos de A^T que correspondem a Autovalores Distintos. Teorema 2.13b

Demonstração

$$\text{Pelo Teor. 2.13a, } \underline{\underline{A}} \text{ e } \underline{\underline{A}}^T \text{ têm mesmos autovalores.}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ são } i\text{-ésimo e } j\text{-ésimo autovalores distintos de } \underline{\underline{A}} \text{ e } \underline{\underline{A}}^T$$

$$\underline{X}_i, \underline{X}_j, \underline{Y}_i, \underline{Y}_j \text{ são os respectivos autovetores de } \underline{\underline{A}} \text{ e de } \underline{\underline{A}}^T \text{; isto é :}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_i = \lambda_i \underline{X}_i \;\;,\;\; \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_j = \lambda_j \underline{X}_j \;\;,\;\; \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_i = \lambda_i \underline{Y}_i \;\;,\;\; \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_j = \lambda_j \underline{Y}_j$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_i = \lambda_i \underline{X}_i \xrightarrow{Transp.} \underline{X}_i^T \underline{\underline{A}}^T = \lambda_i \underline{X}_i^T \xrightarrow{pós-mult.\,\underline{Y}_j} \underline{X}_i^T \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_j = \lambda_i \underline{X}_i^T \underline{Y}_j$$

$$\underline{X}_i^T \underline{\underline{A}}^T \underline{Y}_j = \lambda_i \underline{X}_i^T \underline{Y}_j \Rightarrow \lambda_j \underline{X}_i^T \underline{Y}_j = \lambda_i \underline{X}_i^T \underline{Y}_j \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i)\underline{X}_i^T \underline{Y}_j = 0$$

$$(\lambda_j - \lambda_i)\underline{X}_i^T \underline{Y}_j = 0 \xrightarrow{\lambda_j \neq \lambda_i} \underline{X}_i^T \underline{Y}_j = 0 \;\; (i \neq j) \qquad \boxed{\underline{X}_i \perp \underline{Y}_j \;\; (i \neq j)}$$

Se *A* e *B* são Matrizes *(n x n)* Similares, elas têm a mesma Equação Característica **Teorema 2.13c**

Demonstração

$$\underline{\underline{A}} \ e \ \underline{\underline{B}} \ Similares \ \Rightarrow \ \exists \ \underline{\underline{S}} \ não \ Singular \ tal \ que \ \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$$

$$Eq.\ Carac.\ para\ \underline{\underline{B}}\ :\ DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{S}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{\underline{S}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{DET(\underline{\underline{S}})} DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}).DET(\underline{\underline{S}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se A e B são Matrizes $(n \ x \ \ n)$ Similares, elas têm a mesma Equação Característica **Teorema 2.13c**

Demonstração

$$\underline{\underline{A}} \text{ e } \underline{\underline{B}} \text{ Similares } \Rightarrow \exists \ \underline{\underline{S}} \text{ não Singular tal que } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}$$

$$Eq.\ Carac.\ para\ \underline{\underline{B}} \ : \ DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{I}}\underline{\underline{S}}) = DET(\underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{\underline{S}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{DET(\underline{\underline{S}})} DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}).DET(\underline{\underline{S}}) = 0$$

$$DET(\underline{\underline{B}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = DET(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

Portanto, sendo Similares, A e B Têm os Mesmos Autovalores λ_i

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Um Autovetor de *A (n x n)* Não pode Corresponder a Dois Autovalores Distintos **Teorema 2.14**

Demonstração

$$\underline{\underline{A}}\,(\,n \ \ x \ \ n\,)\ com\ \ Autovalores\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$Admita\ \ que\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2\ \ Correspondem\ ao\ mesmo\ \ Autovetor\ \ \underline{X} \neq \underline{0}.\ Assim:$$

$$(\,\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}\,)\underline{X} = \underline{0}$$

$$(\,\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}\,)\underline{X} = \underline{0}$$

$$Subtraindo:$$

$$(\,\lambda_1 - \lambda_2\,)\underline{\underline{I}}\,\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow (\,\lambda_1 - \lambda_2\,)\underline{X} = \underline{0}$$

$$Como\ \ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \qquad [\,Absurdo\,]$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Um Autovetor de *A (n x n)* Não pode Corresponder a Dois Autovalores Distintos **Teorema 2.14**

Demonstração

$\underline{\underline{A}}\,(\,n\ x\ n\,)\ com\ \ Autovalores\ \lambda_1 \neq \lambda_2$

$Admita\ \ que\ \lambda_1 \neq \lambda_2\ \ Correspondem\ ao\ mesmo\ \ Autovetor\ \ \underline{X} \neq \underline{0}.\ Assim:$

$(\,\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}\,)\underline{X} = \underline{0}$

$(\,\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}\,)\underline{X} = \underline{0}$

$Subtraindo\ :$

$(\,\lambda_1 - \lambda_2\,)\underline{\underline{I}}\,\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow (\,\lambda_1 - \lambda_2\,)\underline{X} = \underline{0}$

$Como\ \ \underline{X} \neq \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad [\,Absurdo\,]$

No entanto, Note que o mesmo Autovalor λ poderá corresponder a Dois (ou mais) Autovetores Distintos. Bastará que o SQH tenha 2 ou + G.L.

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_1 , \underline{X}_2 , ..., \underline{X}_m$ são Autovetores de A $(n\ x\ \ n)$ correspondendo a Autovalores Distintos $\lambda_1 , \lambda_2 , ..., \lambda_m$ $(m \leq n)$, Então $\underline{X}_1 , \underline{X}_2 , ..., \underline{X}_m$ são L.I.

Teorema 2.15

Demonstração

$$\underline{\underline{A}}\,(\,n\ \ x\ \ n\,)\ com\ Soluções\ de\ \ Autovalor\ /\ Autovalor\ (\,\lambda_i\,, \underline{X}_i\,)\ \ i = 1...m$$

$$Todos\ \ São\ \ Soluções\ \ dos\ \ Problemas\ (\,\underline{\underline{A}} - \lambda_i\,\underline{\underline{I}}\,)\underline{X}_i = \underline{0}\ \ \ ,\ \ \ \underline{X}_i \neq \underline{0}\ \ \ (\,i = 1\ldots m\,)$$

$$Admita\ \ que\ \ apenas\ \ os\ \ p\ \ primeiros\ \ Autovetores\ \ são\ L.I.,\ L.D.\ os\ demais:$$

$$\underbrace{\underline{X}_1 , \underline{X}_2 , ..., \underline{X}_p}_{L.I.} , \underbrace{\underline{X}_{p+1} , ..., \underline{X}_m}_{L.D.}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são Autovetores de A $(n \times n)$ correspondendo a Autovalores Distintos λ_1 , λ_2 , ..., λ_m $(m \le n)$, Então $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são L.I. **Teorema 2.15**

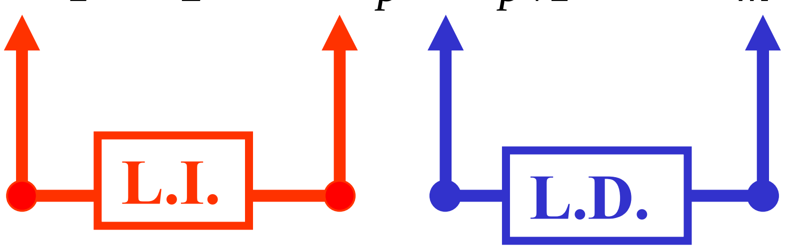
Demonstração

$\underline{\underline{A}}\,(n \times n)$ com Soluções de Autovalor / Autovalor $(\lambda_i, \underline{X}_i)$ $i = 1 \ldots m$

Todos São Soluções dos Problemas $(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}})\underline{X}_i = \underline{0}$, $\underline{X}_i \neq \underline{0}$ $(i = 1 \ldots m)$

Admita que apenas os p primeiros Autovetores são L.I., L.D. os demais :

$\underline{X}_1 , \underline{X}_2 , \ldots , \underline{X}_p , \underline{X}_{p+1} , \ldots , \underline{X}_m$



$$\text{Assim : } \underline{X}_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são Autovetores de A $(n \times n)$ correspondendo a Autovalores Distintos λ_1 , λ_2 , ..., λ_m $(m \le n)$, Então $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são L.I. **Teorema 2.15**

Demonstração

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}})\underline{X}_1 = \underline{0}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}})\underline{X}_2 = \underline{0}$$

$$\vdots$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{I}})\underline{X}_p = \underline{0}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_{p+1} \underline{\underline{I}})\underline{X}_{p+1} = \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{X}_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i}$$

$$\left.\right\} (\underline{\underline{A}} - \lambda_{p+1} \underline{\underline{I}}) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i (\underline{\underline{A}}\underline{X}_i - \lambda_{p+1} \underline{X}_i) = \underline{0}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são Autovetores de A $(n \times n)$ correspondendo a Autovalores Distintos λ_1 , λ_2 , ..., λ_m $(m \le n)$, Então $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, ..., $\underline{X}_m$ são L.I.

Teorema 2.15

Demonstração

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}})\underline{X}_1 = \underline{0}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}})\underline{X}_2 = \underline{0}$$

$$\vdots$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{I}})\underline{X}_p = \underline{0}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_{p+1} \underline{\underline{I}})\underline{X}_{p+1} = \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{X}_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_{p+1} \underline{\underline{I}})\sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i (\underline{\underline{A}}\underline{X}_i - \lambda_{p+1}\underline{X}_i) = \underline{0}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \beta_i (\lambda_i - \lambda_{p+1})\underline{X}_i = \underline{0}}$$

$$\Uparrow \quad \text{Por Quê ?}$$

$$\beta_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_m$ são Autovetores de $A\ (n \times n)$ correspondendo a Autovalores Distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\ (m \le n)$, Então $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_m$ são L.I. **Teorema 2.15**

Demonstração

$$\boxed{\underline{X}_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \underline{X}_i}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0 \\ \\ Como\ \ \lambda_i \ne \lambda_{p+1} \Rightarrow \beta_i = 0 \end{array}\right\} \underline{X}_{p+1} = \underline{0} \Rightarrow Absurdo\ \ pois\ \ \underline{X}_{p+1} \ne \underline{0}$$

O Absurdo estabelece que Não apenas os *p* primeiros, mas Todos Autovetores $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_m$ de Autovalores Distintos, são L.I.

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se os *n* Autovalores de *A (n x n)* são Distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$,
Então os *n* Autovetores $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$,..., $\underline{X}_n$ são L.I. **Corolário 2.15.1**

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Os Autovalores de *A (n x n)* Simétrica são Reais. Teorema 2.16

Demonstração

$$Seja\ \underline{\underline{A}}\,(n\ x\ n),\ Simétrica,\ Real.\ Assim\ \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}\ e\ \overline{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}$$

$$Para\ Provar\ que\ w\ é\ Real,\ provamos\ que\ \overline{w} = w.$$

$$Considere\ um\ Autovalor\ \lambda\ e\ seu\ Autovetor\ \underline{X}\ de\ \underline{\underline{A}}.$$

$$Assim\ \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \lambda\underline{X} \Rightarrow \underline{X}^T\underline{\underline{A}}^T = \lambda\underline{X}^T \Rightarrow \underline{X}^T\underline{\underline{A}} = \lambda\underline{X}^T$$

$$Com\ Conjugados:\ \overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\underline{X}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\underline{X}}$$

$$Pré-Mult.\ a\ anterior\ com\ \underline{X}^T:\ \underline{X}^T\underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{X}} = \overline{\lambda}\,\underline{X}^T\,\overline{\underline{X}} \Rightarrow \lambda\underline{X}^T\,\overline{\underline{X}} = \overline{\lambda}\,\underline{X}^T\,\overline{\underline{X}}$$

$$\underline{X}^T\,\overline{\underline{X}}\ é\ sempre\ Real > 0.$$

$$Logo\ \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda\ Real$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Se $\underline{X}_i$ e $\underline{X}_j$ são Autovetores correspondentes a Autovalores Distintos $\lambda_i \neq \lambda_j$ de A $(n \times n)$ Simétrica, Então $\underline{X}_i$ e $\underline{X}_j$ são Ortogonais; isto é $\underline{X}_i^T \underline{X}_j = 0$. **Teorema 2.17**

Demonstração

$$Seja\ \underline{\underline{A}}\,(n\ x\ n),\ Simétrica,\ Real.\ Assim\ \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$$

$$Sejam\ os\ Autovalores\ Distintos\ \lambda_i \neq \lambda_j\ e\ seus\ Autovetores\ \underline{X}_i\ e\ \underline{X}_j.$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_i = \lambda_i \underline{X}_i \Rightarrow \underline{X}_i^T \underline{\underline{A}}^T = \lambda_i \underline{X}_i^T \Rightarrow \underline{X}_i^T \underline{\underline{A}} = \lambda_i \underline{X}_i^T$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_j = \lambda_j \underline{X}_j \Rightarrow \underline{X}_j^T \underline{\underline{A}}^T = \lambda_j \underline{X}_j^T \Rightarrow \underline{X}_j^T \underline{\underline{A}} = \lambda_j \underline{X}_j^T$$

$$Pr\acute{e}-Mult.\ com\ \underline{X}_i^T\ :\ \underline{X}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_j = \lambda_j \underline{X}_i^T \underline{X}_j \Rightarrow \lambda_i \underline{X}_i^T \underline{X}_j = \lambda_j \underline{X}_i^T \underline{X}_j$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)\underline{X}_i^T \underline{X}_j = 0\ ,\ Como\ \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \underline{X}_i^T \underline{X}_j = 0 \Rightarrow \underline{X}_i \perp \underline{X}_j$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Para matriz *A* Simétrica *(n x n)*, a um Autovalor λ de Multiplicidade *r* , corresponderão Exatamente *r* Autovetores L.I.

Teorema 2.18

Toda matriz *A* Simétrica *(n x n)*, Possui *n* Autovetores L.I.

Corolário 2.18.1

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

Demonstração

$Seja\ \underline{\underline{A}}\ (n\ x\ n),\ Simétrica,\ \mathrm{Re}\, al.\ Assim\ \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

$Fase\ 1: Toda\ Simétrica\ \underline{\underline{A}}\ (n\ x\ n)\ Admite\ n\ Autovetores\ Ortogonais.$

$Fase 1.1: \underline{\underline{A}}\ (n\ x\ n)\ tem\ n\ Autovalores\ Diferentes\ (\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n).$

$Pelo\ Teor.\ 2.17,\ todos\ autovetores\ \underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n\ são\ \perp.$

$Fase 1.2: \underline{\underline{A}}\ (n\ x\ n)\ tem\ repetição\ no\ seu\ quadro\ de\ Autovalores:$

$Os\ Autovetores\ de\ autovalores \neq são \perp (Teor.\ 2.17);$

$Já\ os\ de\ autovalores\ repetidos\ são\ apenas\ L.I.\ (Teor.\ 2.18);$

$Autovetores\ de\ autovalor\ rep.\ são \perp a\ autovetores\ de \neq autovalores.$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

Demonstração

É viável a Ortogonalização de autovetores de autovalor repetido.

$\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k$ *são autovetores de autovalor* λ_a $k-$*múltiplo.*

Assim $\underline{\underline{A}}\,\underline{X}_i = \lambda_a \underline{X}_i \quad (i = 1 \ldots k)$. *Aplicando Ortogonalização Schmidt :*

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{W}_1 = \underline{X}_1 \\
\underline{W}_2 = \underline{X}_2 + \alpha_{21}\underline{W}_1 \\
\underline{W}_3 = \underline{X}_3 + \alpha_{31}\underline{W}_1 + \alpha_{32}\underline{W}_2 \\
\vdots \\
\underline{W}_k = \underline{X}_k + \alpha_{k1}\underline{W}_1 + \ldots + \alpha_{kk-1}\underline{W}_{k-1}
\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{W}_1, \ldots, \underline{W}_k \text{ C.L. de } \underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

Demonstração

$$\underline{W}_1, \underline{W}_2 \ldots, \underline{W}_k \ \ C.L.\ de\ \ \underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k \Rightarrow \underline{W}_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \underline{X}_j$$

$$\underline{W}_1, \underline{W}_2 \ldots, \underline{W}_k \ \ São\ Também\ \perp$$

Testamos $\underline{W}_1, \underline{W}_2, \ldots, \underline{W}_k$ *como autovetores de autovalor* λ_a :

$$\underline{\underline{A}}\underline{W}_i = \underline{\underline{A}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \underline{X}_j = \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \underline{\underline{A}}\underline{X}_j = \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \lambda_a \underline{X}_j = \lambda_a \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \underline{X}_j = \lambda_a \underline{W}_i$$

$$\underline{\underline{A}}\underline{W}_i = \lambda_a \underline{W}_i \Rightarrow \underline{W}_i\ \ é\ \ Autovetor\ \ Associado\ a\ \lambda_a\ \ (i = 1 \ldots k)$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

Demonstração

Isto é, os Autovetores de Autovalor Repetido, após Ortogonalização Schmidt, Continuam Autovetores, porém, agora apresentando Ortogonalidade.

Em suma, Sempre é possível escrever *n* Autovetores Ortogonais para uma Matriz *A (n x n)* Simétrica, mesmo que haja repetição em seus Autovalores.

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

Demonstração

$$Fase\ 2: Os\ n\ \ Autovetores\ Ortogonais,\ \mathrm{Re}unidos\ na\ \ Fase\ 1\ anterior,\ e$$

$$Simbolizados\ como\ \underline{W}_1, \underline{W}_2, \ldots, \underline{W}_n,\ \ podem\ agora\ \ ser$$

$$Normalizados,$$

$$Tornando - se\ n\ \ Autovetores\ Ortonormais\ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n.$$

$$\underline{P}_i = \frac{\underline{W}_i}{\left\|\underline{W}_i\right\|} \Rightarrow \left\|\underline{P}_i\right\| = 1$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

Toda Matriz *A* (*n x n*) Simétrica, Admite *n* Autovetores Ortonormais (i.e. Ortogonais e Normalizados) **Teorema 2.19**

(Isto ocorre independentemente da repetição ou não de autovalores)

$$Em\ Suma: \underline{\underline{A}}\ (n\,x\,n)\ Simétrica \Rightarrow Existem\ \ Autovetores\ \underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$$

$$com\ \ \underline{\underline{A}}\underline{P}_i = \lambda_i \underline{P}_i \ \ ,\ \ \left\| \underline{P}_i \right\| = 1 \quad (i = 1 \ldots n)$$

$$Tais\ \ que\ \ \underline{P}_i^T \underline{P}_j = 0 \quad (i \neq j),\ \ \underline{P}_i^T \underline{P}_i = 1 \quad (i = j)$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A (*n x n*) Simétrica, Tem *n* Autovetores Ortonormais Teor. 2.19

$Cadeia\ de\ Ações\ Exemplificada\ \ para\ n = 9 : \underline{\underline{A}}\ (9\,x\,9)\ Simétrica$

$(1)\ Obter\ \ Autovalores\ (são\ todos\ reais, Teor.\ 2.16) :$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5, \lambda_6\ (3\ rep.\ em\ \lambda_3,\ 2\ rep.\ em\ \lambda_5)$$

$(2)\ Autovetores\ Forma\ \underline{X}_i \rightarrow Forma\ \underline{W}_i \rightarrow Forma\ \underline{P}_i$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\lambda_1, & \lambda_2, & & \lambda_3,\lambda_3,\lambda_3, & & \lambda_4, & & \lambda_5,\lambda_5, & & \lambda_6 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \underline{X}_{3a} & \underline{X}_{3b} & \underline{X}_{3c} & \underline{X}_4 & \underline{X}_{5a} & & \underline{X}_{5b} & \underline{X}_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 & \underline{W}_4 & \underline{W}_5 & \underline{W}_6 & \underline{W}_7 & & \underline{W}_8 & \underline{W}_9 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \underline{P}_3 & \underline{P}_4 & \underline{P}_5 & \underline{P}_6 & \underline{P}_7 & & \underline{P}_8 & \underline{P}_9
\end{array}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A (*n x n*) Simétrica, Tem *n* Autovetores Ortonormais Teor. 2.19

$$Cadeia\ de\ Ações\ Exemplificada\ para\ n=9:\ \underline{\underline{A}}\ (9\,x\,9)\ Simétrica$$

$$(1)\ Obter\ Autovalores\ (são\ todos\ reais, Teor.\ 2.16):$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_5,\lambda_6\ (3\ rep.\ em\ \lambda_3,\ 2\ rep.\ em\ \lambda_5)$$

$$(2)\ Autovetores\ Forma\ \underline{X}_i \rightarrow Forma\ \underline{W}_i \rightarrow Forma\ \underline{P}_i$$

Apenas L.I.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_3, & \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5, & \lambda_5, & \lambda_6 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \underline{X}_{3a} & \underline{X}_{3b} & \underline{X}_{3c} & \underline{X}_4 & \underline{X}_{5a} & \underline{X}_{5b} & \underline{X}_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 & \underline{W}_4 & \underline{W}_5 & \underline{W}_6 & \underline{W}_7 & \underline{W}_8 & \underline{W}_9 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \underline{P}_3 & \underline{P}_4 & \underline{P}_5 & \underline{P}_6 & \underline{P}_7 & \underline{P}_8 & \underline{P}_9
\end{array}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A (*n x n*) Simétrica, Tem *n* Autovetores Ortonormais Teor. 2.19

$Cadeia\ de\ Ações\ Exemplificada\ \ para\ \ n = 9 : \underline{\underline{A}}\ (9\, x\, 9)\ \ Simétrica$

$(1)\ Obter\ \ Autovalores\ (são\ todos\ reais, Teor.\ 2.16) :$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5, \lambda_6\ \ (3\ rep.\ em\ \lambda_3,\ 2\ rep.\ em\ \lambda_5)$$

$(2)\ \ Autovetores\ \ Forma\ \ \underline{X}_i \rightarrow Forma\ \underline{W}_i \rightarrow Forma\ \ \underline{P}_i$

Já Ortogonais

$\underline{W}_i = \underline{X}_i$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1, & \lambda_2, & & \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, & & \lambda_4, & \lambda_5, \lambda_5, & & \lambda_6 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \underline{X}_{3a} & \underline{X}_{3b} & \underline{X}_{3c} & \underline{X}_4 & \underline{X}_{5a} & \underline{X}_{5b} & \underline{X}_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 & \underline{W}_4 & \underline{W}_5 & \underline{W}_6 & \underline{W}_7 & \underline{W}_8 & \underline{W}_9 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \underline{P}_3 & \underline{P}_4 & \underline{P}_5 & \underline{P}_6 & \underline{P}_7 & \underline{P}_8 & \underline{P}_9
\end{array}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A (*n x n*) Simétrica, Tem *n* Autovetores Ortonormais Teor. 2.19

Cadeia de Ações Exemplificada para $n = 9$: $\underline{\underline{A}}\ (9 x 9)$ *Simétrica*

(1) *Obter Autovalores* (*são todos reais, Teor.* 2.16) :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5, \lambda_6 \ (3 \ rep. \ em \ \lambda_3, \ 2 \ rep. \ em \ \lambda_5)$$

(2) *Autovetores Forma* $\underline{X}_i \rightarrow$ *Forma* $\underline{W}_i \rightarrow$ *Forma* $\underline{P}_i$

Ortogonalizar via Schmidt

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1, & \lambda_2, & & \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, & & \lambda_4, & \lambda_5, \lambda_5, & & \lambda_6 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \underline{X}_{3a} & \underline{X}_{3b} & \underline{X}_{3c} & \underline{X}_4 & \underline{X}_{5a} & \underline{X}_{5b} & \underline{X}_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 & \underline{W}_4 & \underline{W}_5 & \underline{W}_6 & \underline{W}_7 & \underline{W}_8 & \underline{W}_9 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \underline{P}_3 & \underline{P}_4 & \underline{P}_5 & \underline{P}_6 & \underline{P}_7 & \underline{P}_8 & \underline{P}_9
\end{array}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
3. Autovalores e Autovetores

A (*n x n*) Simétrica, Tem *n* Autovetores Ortonormais Teor. 2.19

$$Cadeia\ de\ Ações\ Exemplificada\ \ para\ n=9:\underline{\underline{A}}\ (9\,x\,9)\ Simétrica$$

$$(1)\ Obter\ \ Autovalores\ (são\ todos\ reais, Teor.\ 2.16):$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_5,\lambda_6\ (3\ rep.\ em\ \lambda_3,\ 2\ rep.\ em\ \lambda_5)$$

$$(2)\ \ Autovetores\ \ Forma\ \ \underline{X}_i \rightarrow Forma\ \underline{W}_i \rightarrow Forma\ \ \underline{P}_i$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1, & \lambda_2, & & \lambda_3,\lambda_3,\lambda_3, & & \lambda_4, & \lambda_5,\lambda_5, & & \lambda_6 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \underline{X}_{3a} & \underline{X}_{3b} & \underline{X}_{3c} & \underline{X}_4 & \underline{X}_{5a} & \underline{X}_{5b} & \underline{X}_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 & \underline{W}_4 & \underline{W}_5 & \underline{W}_6 & \underline{W}_7 & \underline{W}_8 & \underline{W}_9 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \underline{P}_3 & \underline{P}_4 & \underline{P}_5 & \underline{P}_6 & \underline{P}_7 & \underline{P}_8 & \underline{P}_9
\end{array}$$

Normalização

$$\underline{P}_i = \underline{W}_i \,/\, \left\| \underline{W}_i \right\|$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

A, *B* (*n x n*), *P* e *Q* (*n x n*) Não Singulares — Definição 2.1

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} \quad \rightarrow \quad \textit{Transformação de Equivalência } (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \textit{ Equivalentes})$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{Q}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} \quad \rightarrow \quad \textit{Transformação de Similaridade } (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \textit{ Similares})$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{Q}}^{T}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} \quad \rightarrow \quad \textit{Transformação de Congruência } (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \textit{ Congruentes})$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{Q}}^{T}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} \quad \rightarrow \quad \textit{Transformação Ortogonal } (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \textit{ Ortogonal / Similares})$$

$$\underline{\underline{Q}}^{T} = \underline{\underline{Q}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\overline{Q}}}^{T}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} \quad \rightarrow \quad \textit{Transformação Unitária } (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \textit{ Unitaria / Similares})$$

$$\underline{\underline{\overline{Q}}}^{T} = \underline{\underline{Q}}^{-1}$$

A (*n x n*), possui *n* Autovetores L.I., então *A* é Similar à Matriz de Autovalores em Diagonal — Teorema 2.20

Demonstração

Sejam $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ *Autovetores Normalizados de* $\underline{\underline{A}}$.

Seja a Matriz $\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \quad (n \ x \ n)$

Como Autovetores L.I. $\Rightarrow Posto(\underline{\underline{P}}) = n,\ DET(\underline{\underline{P}}) \neq 0,\ \exists\ \underline{\underline{P}}^{-1}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}\begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}\,\underline{P}_1 & \underline{\underline{A}}\,\underline{P}_2 & \cdots & \underline{\underline{A}}\,\underline{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \underline{P}_1 & \lambda_2 \underline{P}_2 & \cdots & \lambda_n \underline{P}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

A (n x n) Inversível, então Autovalores de A^{-1} são o Inverso de Autovalores A e Autovetores são Iguais aos de A. Teorema 2.21

Demonstração

Sejam $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ *Autovetores Normalizados de* $\underline{\underline{A}}$.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{P}_i = \lambda_i \underline{P}_i \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{P}_i = \lambda_i \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{P}_i \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{P}_i = \frac{1}{\lambda_i}\underline{P}_i$$

Logo Autovalores de $\underline{\underline{A}}^{-1}$ *são os Inversos de Autovalores de* $\underline{\underline{A}}$, *com os mesmos Autovetores Correspondentes.*

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

A (n x n) Inversível com n Autovetores L.I.., então A^{-1} é Similar à Matriz Diagonal de Inversos de Autovalores **Corolário 2.21.1**

Demonstração

$$\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n \ \textit{Autovetores Normal. de } \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}\underline{P}_i = \lambda_i \underline{P}_i \Rightarrow \underline{\underline{AP}} = \underline{\underline{A}}\left[\underline{P}_1 \quad \underline{P}_2 \quad \cdots \quad \underline{P}_n\right]$$

$$\underline{\underline{AP}} = \underline{\underline{P\lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P\lambda P}}^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{AP}} = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P\lambda P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{P\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{P}}\begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix}\underline{\underline{P}}^{-1} \qquad \underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{P}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

A (n x n) Simétrica, então A é Similar a uma Matriz Diagonal.

Teorema 2.22

Demonstração

Pelo Teor. 2.19, $\underline{\underline{A}}$ (n x n) *Simétrica possui* n *Autovetores Ortogonais e, assim, L.I.*

Logo, pelo Teor. 2.20, $\underline{\underline{A}}$ *é Similar à Matriz Diagonal de Autovalores*:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

Uma Matriz cujas Colunas são ortogonais entre si, é uma Matriz Ortogonal. **Teorema 2.23**

Demonstração

$$Seja\ \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix}$$

$$Cujas\ Colunas\ são\ \perp : \underline{P}_i^T \underline{P}_j = 0\ (i \neq j)\quad \underline{P}_i^T \underline{P}_i = 1\quad (i = j)$$

$$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \\ \underline{P}_2^T \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \underline{P}_1 & \underline{P}_1^T \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_1^T \underline{P}_n \\ \underline{P}_2^T \underline{P}_1 & \underline{P}_2^T \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_2^T \underline{P}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{P}_n^T \underline{P}_1 & \underline{P}_n^T \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n^T \underline{P}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$DET(\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}}) = 1 \Rightarrow DET(\underline{\underline{P}})^2 = 1 \Rightarrow DET(\underline{\underline{P}}) = \pm 1$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

A Simétrica *(n x n)* é Ortogonalmente Similar à Matriz Diagonal de Autovalores

Teorema 2.24

Demonstração

$Sejam\ \ \underline{P}_1, \underline{P}_2, ..., \underline{P}_n\ \ os\ \ Autovetores\ \ de\ \ \underline{\underline{A}}\ Simétrica\ (n\,x\,n).$

$Sejam\ \ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\ \ os\ \ Autovalores\ \ Correspondentes.$

$$Assim\ \ \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix}\ ,\ \ \underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Pelo\ Teor.\ 2.22 : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}$$

$Como\ os\ \ Autovetores\ \ de\ \ \underline{\underline{A}}\ Simétrica\ são\ \perp,\ \underline{\underline{P}}\ é\ Ortogonal;$

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{P}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

Com *M* Simétrica *(n x n)*, qualquer Forma Quadrática *Q(X)* pode ser posta igual à Forma Diagonal com Autovalores. Teorema 2.25

Demonstração

$$\text{Seja a Forma Quadrática } Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}. \text{ Como } \underline{\underline{M}} \text{ é Simétrica}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T \quad , \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \,, \; \underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T \underline{X}, \text{ com } \underline{Y} = \underline{\underline{P}}^T \underline{X} \Leftrightarrow \underline{Y}^T = \underline{X}^T \underline{\underline{P}}$$

$$Q(\underline{X}) = \underline{Y}^T \underline{\underline{\lambda}}\,\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i^2$$

$$\text{onde } \underline{P}_1,\, \underline{P}_2,\, \ldots,\, \underline{P}_n \text{ os Autovetores e } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ os Autovalores}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

Com *M* Simétrica *(n x n), a* Forma Quadrática *Q($\underline{X}$)* pode ter seu carácter determinado pelos Autovalores de *M*. **Teorema 2.26**

Demonstração

$$Com\ Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X},\ \ \underline{\underline{M}}\ Simétrica\ e\ Teor.2.25: Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \underline{X}^T \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T \underline{X},$$

$$\underline{\underline{P}} = [\underline{P}_1 \quad \cdots \quad \underline{P}_n]\ Autovets\ normalizados,\ \ \underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\ Autovals\ em\ diagonal$$

$$Usando\ \underline{Y} = \underline{\underline{P}}^T \underline{X} \Leftrightarrow \underline{Y}^T = \underline{X}^T \underline{\underline{P}} \Rightarrow Q(\underline{X}) = \underline{Y}^T \underline{\underline{\lambda}}\,\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i^2,\ resulta:$$

$$Q(\underline{X})\ Positiva-definida \Leftrightarrow \lambda_i > 0\ (i = 1,\dots,n)$$

$$Q(\underline{X})\ Positiva-semidefinida \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0\ (i = 1,\dots,n),\ pelo\ menos\ um\ \lambda_k = 0$$

$$Q(\underline{X})\ Negativa-definida \Leftrightarrow \lambda_i < 0\ (i = 1,\dots,n)$$

$$Q(\underline{X})\ Negativa-semidefinida \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0\ (i = 1,\dots,n),\ pelo\ menos\ um\ \lambda_k = 0$$

$$Q(\underline{X})\ Indefinida \Leftrightarrow Pelo\ menos\ um\ \lambda_i \leq 0,\ pelo\ menos\ um\ \lambda_i > 0$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

Com *M* Simétrica *(n x n), a* Forma Quadrática *Q(X)* pode ter seu carácter determinado pelos Autovalores de *M*. **Teorema 2.26**

Exemplo

$$Q(\underline{X}) = \underline{X}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{X}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Cap. II : Autovalores, Autovetores e F. Quadráticas
4. Transformações em Matrizes

Com *M* Simétrica *(n x n)*, *a* Forma Quadrática *Q(X)* pode ter seu carácter determinado pelos Autovalores de *M*. Teorema 2.26

Exemplo

$Autovalores:$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.7295,\ \lambda_2 = 2.6587,\ \lambda_3 = 7.6119$$

$$Assim\ \ Q(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i Y_i^2 \ \Rightarrow\ Q(\underline{X})\ é\ Positiva-definida.$$

$$Para\ calcular\ \ Autovalores\ \ no\ \ Matlab : [P, Lambda] = eig(M)$$