DISCIPLINA

Métodos Matemáticos Aplicados a Processos Químicos e Bioquímicos

Capítulo I : Análise Matricial

José Luiz de Medeiros e Ofélia Q.F. Araújo
Engenharia Química – UFRJ
jlm@eq.ufrj.br, ofelia@eq.ufrj.br
Tel. 21-2562-7535

Cap. I : Análise Matricial

1. Notação

Vetor Coluna *n x 1*

Vetor Linha *1 x m*

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_m \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Vetor Coluna ***n x 1***

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Vetor Linha ***1 x m***

$$\underline{U}^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_m \end{bmatrix}$$

A Generalização do Conceito de Vetor (Coluna ou Linha) Leva à Noção de Matriz como Arranjo Bidimensional de Números.

Uma Matriz é um Arranjo em Linha de Vetores Colunares; ou um Arranjo Colunar de Vetores Linha.

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz $n \times m$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

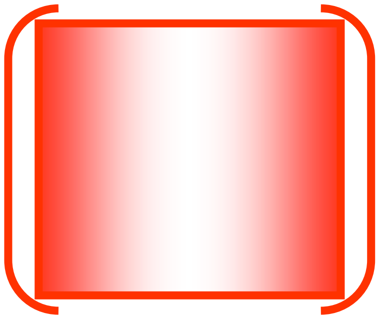
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

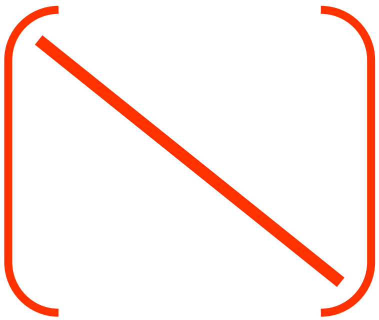
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

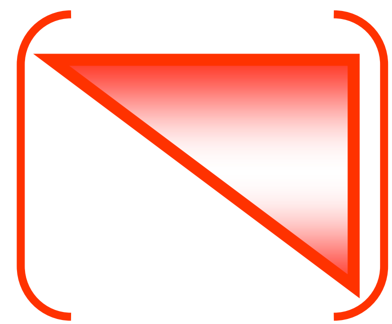
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

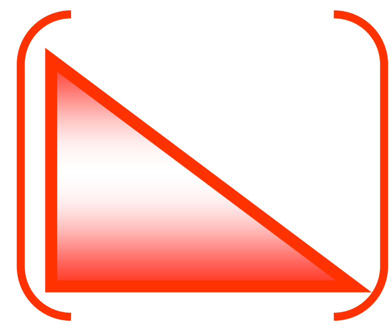
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i\text{-}1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

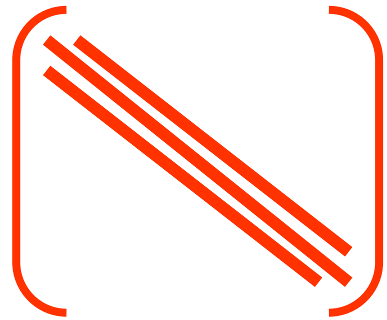
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

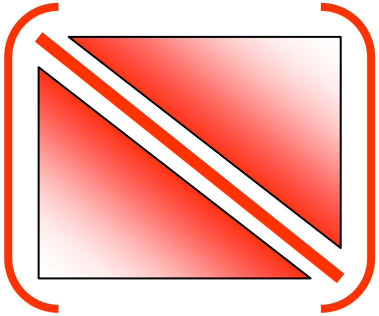
Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$



Quadrada : $(n=m)$

Diagonal : $(n=m) \wedge (i \neq k \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Superior: $(n=m) \wedge (k<i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Triangular Inferior : $(n=m) \wedge (k>i) \rightarrow A_{ik}=0)$

Tridiagonal : $(n=m) \wedge ((k< i-1) \vee (i+1<k)) \rightarrow A_{ik}=0)$

Simétrica : $(n=m) \wedge (A_{ik}= A_{ki})$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m* **Representação de Matriz em Linhas**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix}$$

$\underline{A}\big|_k^T \rightarrow$ **Linha *k* de** $\underline{\underline{A}}$

Cap. I : Análise Matricial
1. Notação

Matriz *n x m* **Representação de Matriz em Colunas**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

$\underline{A}_k \rightarrow$ **Coluna *k* de** $\underline{\underline{A}}$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Soma e Subtração Matricial — Definição

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij} \quad \left\{ \underline{\underline{A}},\ \underline{\underline{B}},\ \underline{\underline{C}}\ (n\,x\,m) \right.$$

- **Propriedades :**

Comutativa

$$\rightarrow \underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \pm \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$$

Associativa

$$\rightarrow \underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} \pm \underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}}\right) \pm \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \pm \left(\underline{\underline{B}} \pm \underline{\underline{C}}\right)$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matriz por Escalar — Definição

$$\underline{\underline{C}} = \beta \underline{\underline{A}} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = \beta . A_{ij} \qquad \{ \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{C}} \ (n \, x \, m)$$

- **Propriedades :**

Comutativa $\rightarrow \beta \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \beta$

Distributiva $\rightarrow (\beta + \eta) \underline{\underline{A}} = \beta \underline{\underline{A}} + \eta \underline{\underline{A}}$

Distributiva $\rightarrow \beta (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \beta \underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{B}}$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial — Definição

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}.B_{kj} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\ (n \times m),\ \underline{\underline{B}}\ (m \times p) \\ \underline{\underline{C}}\ (n \times p) \end{cases}$$

▪ **Propriedades :**

Não Comutativa $\rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ **(Em Geral)**

Associativa $\rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)$

Distributiva $\rightarrow \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$

Identidade à Esquerda $\rightarrow \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \qquad \left(\underline{\underline{I}}\ \ n \times n\right)$

Identidade à Direita $\rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}} \qquad \left(\underline{\underline{I}}\ \ m \times m\right)$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matriz e Vetor — Definição

$$\underline{C} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} \quad \Rightarrow \quad C_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \, . X_k \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}} \; (n \, x \, m) \\ \underline{X} \; (m \, x \, 1) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matriz e Vetor

Definição

$$\underline{C} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} \quad \Rightarrow \quad C_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}.X_k \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \\ \underline{X}\,(m\,x\,1) \\ \underline{C}\,(n\,x\,1) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matriz e Vetor — Definição

$$\underline{C} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} \quad \Rightarrow \quad C_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} . X_k \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \\ \underline{X}\,(m\,x\,1) \\ \underline{C}\,(n\,x\,1) \end{cases}$$

$$\underline{D}^T = \underline{Y}^T \underline{\underline{A}} \quad \Rightarrow \quad D_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i A_{ij} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \\ \underline{Y}^T\,(1\,x\,n) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matriz e Vetor — Definição

$$\underline{C} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} \quad \Rightarrow \quad C_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} . X_k \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\ (n \times m) \\ \underline{X}\ (m \times 1) \\ \underline{C}\ (n \times 1) \end{cases}$$

$$\underline{D}^T = \underline{Y}^T \underline{\underline{A}} \quad \Rightarrow \quad D_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i A_{ij} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\ (n \times m) \\ \underline{Y}^T\ (1 \times n) \\ \underline{D}^T\ (1 \times m) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial Formatos Válidos

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix} \qquad \left\{ \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \right.$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{B}\big|_1^T \\ \underline{B}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{B}\big|_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \cdots & \underline{B}_p \end{bmatrix} \qquad \left\{ \underline{\underline{B}}\,(m\,x\,p) \right.$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial — Formatos Válidos

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{\underline{B}} \\ \underline{A}\big|_2^T \underline{\underline{B}} \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_p \\ \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n \, x \, m) \\ \underline{\underline{B}}\,(m \, x \, p) \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,(n \, x \, p) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial — Formatos Válidos

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{\underline{B}} \\ \underline{A}\big|_2^T \underline{\underline{B}} \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_p \\ \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_i^T \underline{\underline{B}}$$

Linha i de $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{A}}\,(n \times m) \\ \underline{\underline{B}}\,(m \times p) \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,(n \times p) \end{array} \right.$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial — Formatos Válidos

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \cdots & \underline{B}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_1 & \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_2 & \cdots & \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_1^T \underline{B}_p \\ \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_2^T \underline{B}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_1 & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}\big|_n^T \underline{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n \, x \, m) \\ \underline{\underline{B}}\,(m \, x \, p) \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,(n \, x \, p) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial — Formatos Válidos

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\left\lfloor \underline{B}_1 \quad \underline{B}_2 \quad \cdots \quad \underline{B}_p \right\rfloor = \left\lfloor \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_1 \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_2 \quad \cdots \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_p \right\rfloor$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}|_1^T \underline{B}_1 & \underline{A}|_1^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}|_1^T \underline{B}_p \\ \underline{A}|_2^T \underline{B}_1 & \underline{A}|_2^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}|_2^T \underline{B}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{A}|_n^T \underline{B}_1 & \underline{A}|_n^T \underline{B}_2 & \cdots & \underline{A}|_n^T \underline{B}_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \\ \underline{\underline{B}}\,(m\,x\,p) \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,(n\,x\,p) \end{cases}$$

Coluna *j* de $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{B}_j$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial **Ortogonalidade de Vetores**

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}, \underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{U} \ (n \, x \, 1) \\ \underline{V} \ (n \, x \, 1) \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Multiplicação Matricial - Ortogonalidade de Vetores

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}, \underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{U}\ (n \, x \, 1) \\ \underline{V}\ (n \, x \, 1) \end{cases}$$

$$\underline{U}^T \underline{V} = \sum_{i=1}^{n} U_i V_i = \underline{V}^T \underline{U} = 0$$

$\underline{U}$, $\underline{V}$ são Ortogonais

$$\underline{U} \perp \underline{V}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Integração / Diferenciação Matricial — Definição

$$\underline{\underline{A}}(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \cdots & A_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \cdots & A_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad \left\{ \underline{\underline{A}}(t)\,(n \, x \, m) \right.$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Integração / Diferenciação Matricial **Definição**

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{A}}(t)\right)=\begin{bmatrix} \frac{dA_{11}(t)}{dt} & \frac{dA_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{1m}(t)}{dt} \\ \frac{dA_{21}(t)}{dt} & \frac{dA_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{2m}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dA_{n1}(t)}{dt} & \frac{dA_{n2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{nm}(t)}{dt} \end{bmatrix} \left\{ \underline{\underline{A}}(t)\,(n \, x \, m) \right.$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Integração / Diferenciação Matricial — Definição

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{A}}(t)\right)=\begin{bmatrix} \frac{dA_{11}(t)}{dt} & \frac{dA_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{1m}(t)}{dt} \\ \frac{dA_{21}(t)}{dt} & \frac{dA_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{2m}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dA_{n1}(t)}{dt} & \frac{dA_{n2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dA_{nm}(t)}{dt} \end{bmatrix} \left\{ \underline{\underline{A}}(t)\,(n\,x\,m) \right.$$

$$\int \underline{\underline{A}}(t)dt = \begin{bmatrix} \int A_{11}(t)dt & \int A_{12}(t)dt & \cdots & \int A_{1m}(t)dt \\ \int A_{21}(t)dt & \int A_{22}(t)dt & \cdots & \int A_{2m}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int A_{n1}(t)dt & \int A_{n2}(t)dt & \cdots & \int A_{nm}(t)dt \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial — Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \qquad \left\{ \underline{\underline{A}}\,(n \, x \, m) \right.$$

Transposição

$$\underline{\underline{A}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^T \qquad \left\{ \underline{\underline{A}}^T\,(m \, x \, n) \right.$$

$$\left(\underline{\underline{A}}^T\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{A}}\right)_{ji} = A_{ji}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial — Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,m) \\ \\ \underline{\underline{A}}^T\,(m\,x\,n) \end{cases}$$

Transposição

$$\underline{\underline{A}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^T$$

$$\left(\underline{\underline{A}}^T\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{A}}\right)_{ji} = A_{ji}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial — Formatos

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T \\ \underline{A}_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1 & \underline{A}\big|_2 & \cdots & \underline{A}\big|_n \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial

Matriz Simétrica

Requisito : Quadrada

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T \\ \underline{A}_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial

Matriz Simétrica

Requisito : Quadrada

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T \\ \underline{A}_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Reflexão Relativa à Diagonal Principal

Cap. I : Análise Matricial
2. Operações

Transposição Matricial — Propriedades

$$\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T$$

Transposição da Soma

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{B}}^T\,\underline{\underline{A}}^T$$

Transposição do Produto

Transposição Matricial — Propriedades

$$\left(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T$$

Transposição da Soma

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{B}}^T\,\underline{\underline{A}}^T$$

Transposição do Produto

$$\begin{aligned}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\right)^T &= \left(\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\left(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\right)\right)^T \\ &= \left(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\right)^T\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T \\ &= \underline{\underline{D}}^T\,\underline{\underline{C}}^T\,\underline{\underline{B}}^T\,\underline{\underline{A}}^T\end{aligned}$$

Transposição Multi-Produto

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante — Definição

Função Escalar dos Elementos de Matrizes Quadradas

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$DET(\underline{\underline{A}}) = \Delta_A = \left|\underline{\underline{A}}\right| = D_A$$

Determinante — Definição

$$DET(\underline{\underline{A}}) = \sum_{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \cdots A_{n\alpha_n}$$

$$DET(\underline{\underline{A}}) = \sum_{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n\}} (-1)^{\delta} \prod_{i=1}^{n} A_{i\alpha_i}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \ \ permutação \ par \ \ de \ 123 \cdots n \Rightarrow \delta = 0$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \ \ permutação \ impar \ de \ 123 \cdots n \Rightarrow \delta = 1$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante — Definição

$$DET(\underline{\underline{A}}) = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \cdots A_{n\alpha_n}$$

$$DET(\underline{\underline{A}}) = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} \prod_{i=1}^{n} A_{i\alpha_i}$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \;\; permutação\ par \quad de\,123\cdots n \Rightarrow \delta = 0$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \;\; permutação\ impar\ de\,123\cdots n \Rightarrow \delta = 1$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Multiplicações $(n-1)*n!$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3}$$

$$123 \Rightarrow \delta = 0$$

$$132 \Rightarrow \delta = 1$$

$$213 \Rightarrow \delta = 1$$

$$231 \Rightarrow \delta = 0$$

$$312 \Rightarrow \delta = 0$$

$$321 \Rightarrow \delta = 1$$

$$\begin{aligned} D_A = &+A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \\ &- A_{12}A_{21}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} \\ &+ A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} \end{aligned}$$

Multiplicações

$$(3-1)*3! = 12$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3}$$

Multiplicações

$$(n-1)^* n!$$

n	Multiplicações	CPU
5	480	10^{-3}s
10	5.10^{6}	10s
15	2.10^{12}	1000h

Determinante — Definição Equivalente e Idêntica

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \cdots A_{n\alpha_n}$$

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{\alpha_1 1} A_{\alpha_2 2} \cdots A_{\alpha_n n}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Menor e Cofator Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Menor e Cofator

Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Menor *ij*

$$M_{ij}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Menor e Cofator — Definição

$$\underline{\underline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{array}\right]$$

Menor *ij*

$$M_{ij}$$

Retirar Linha *i* e Coluna *j* e Calcular o Determinante *n-1 x n-1* Resultante para Obter M_{ij}

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Menor e Cofator — Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Cofator *ij*

$$\Omega_{ij}$$

$$\Omega_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Matriz de Cofatores — Definição

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \left\{ \underline{\underline{A}}\,(n\,x\,n) \right.$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix} \quad \left\{ \underline{\underline{\Omega}}\,(n\,x\,n) \right.$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Matriz de Cofatores Definição

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}\big|_1^T \\ \underline{\Omega}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{\Omega}\big|_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_1 & \underline{\Omega}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_n \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \underline{\underline{A}}\,(n \, x \, n) \right.$$

Matriz de Cofatores

Definição

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}\big|_1^T \\ \underline{\Omega}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{\Omega}\big|_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_1 & \underline{\Omega}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_n \end{bmatrix}$$

Cofatores da Coluna *j*

$$\underline{\Omega}\big|_i^T = \begin{bmatrix} \Omega_{i1} & \Omega_{i2} & \cdots & \Omega_{in} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\Omega}_j = \begin{bmatrix} \Omega_{1j} \\ \Omega_{2j} \\ \vdots \\ \Omega_{nj} \end{bmatrix}$$

Cofatores da Linha *i*

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Expansão de Laplace — Teorema 1.1

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O Determinante da Matriz Admite as Formas Equivalentes Abaixo, Idênticas em Esforço Numérico à Definição via Permutações

$$D_A = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\Omega_{ij} \quad \{\forall i$$

Expansão de Laplace via Linha *i*

$$D_A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\Omega_{ij} \quad \{\forall j$$

Expansão de Laplace via Coluna *j*

Determinante da Transposta **Teorema 1.2**

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad DET(\underline{\underline{A}}) = DET(\underline{\underline{A}}^T)$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante da Transposta — Teorema 1.2

Demonstração

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \cdots A_{n\alpha_n}$$

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} B_{\alpha_1 1} B_{\alpha_2 2} \cdots B_{\alpha_n n} \qquad \left\{ B_{ji} = A_{ij} \right.$$

$$D_B = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} B_{\alpha_1 1} B_{\alpha_2 2} \cdots B_{\alpha_n n}$$

$$D_A = D_B = DET(\underline{\underline{A}}^T)$$

Determinante após Multiplicar Linha/Coluna **Teorema 1.3**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_i^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}\big|_1^T \\ \underline{A}\big|_2^T \\ \vdots \\ \lambda\underline{A}\big|_i^T \\ \vdots \\ \underline{A}\big|_n^T \end{bmatrix} \Rightarrow D_B = \lambda D_A$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \lambda\underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix} \Rightarrow D_C = \lambda D_A$$

Determinante após Multiplicar Linha/Coluna — Teorema 1.3

Demonstração

$$D_B = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\Omega_{ij}^{(B)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda A_{ij}\Omega_{ij}^{(A)} = \lambda D_A$$

Exp. Laplace via Linha *i*

$$D_C = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}\Omega_{ij}^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{ij}\Omega_{ij}^{(A)} = \lambda D_A$$

Exp. Laplace via Coluna *j*

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante após Multiplicar Linha/Coluna **Teorema 1.3**

Corolário 1.3.1

Matriz com Linha ou Coluna Nula tem Determinante Nulo

Demonstração : Usar Teor. 1.3 com $\lambda=0$ na Coluna ou Linha em Questão

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Matrizes com Colunas Comuns Exceto *j* — Teorema 1.4

Coluna *j*

$$\underline{\underline{A}}_k = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_{j-1} & \underline{P}_k & \underline{A}_{j+1} & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \left[\begin{matrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_{j-1} & \sum_{k}^{m} \lambda_k \underline{P}_k & \underline{A}_{j+1} & \cdots & \underline{A}_n \end{matrix} \right]$$

Coluna *j*

Então

$$D_B = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{A_k}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Matrizes com Colunas Comuns Exceto *j* — Teorema 1.4

Demonstração : Exp. de Laplace via Col. *j* em D_B

Coluna *j*

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_{j-1} & \sum_{k}^{m} \lambda_k \underline{P}_k & \underline{A}_{j+1} & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$D_B = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\Omega_{ij}^{(B)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_{ik}\Omega_{ij}^{(A)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} P_{ik}\Omega_{ij}^{(A)}$$

$$D_B = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} P_{ik}\Omega_{ij}^{(A)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{A_k}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Matrizes com Colunas Comuns Exceto *j* **Teorema 1.4**

Corolário 1.4.1

Matrizes com Linhas Comuns Exceto *i*
(Resultado Análogo para Linhas em vez de Colunas)

Demonstração : Usar, como no Teor. 1.4, Expansão de Laplace na Linha *i*

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

A Troca de Duas Linhas (ou Duas Colunas) de Matriz, Multiplica o Determinante por -1 **Teorema 1.5**

Demonstração :

Col. *i*

Col *j*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

Idênticas, Exceto pelo Intercâmbio de Colunas *i* e *j*

Demonstração **Teorema 1.5**

$$D_A = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{\alpha_1 1} A_{\alpha_2 2} \cdots A_{\alpha_i i} \cdots A_{\alpha_j j} \cdots A_{\alpha_n n}$$

$$D_B = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} B_{\alpha_1 1} B_{\alpha_2 2} \cdots B_{\alpha_i i} \cdots B_{\alpha_j j} \cdots B_{\alpha_n n}$$

$$D_B = \sum_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}} (-1)^{\delta} A_{\alpha_1 1} A_{\alpha_2 2} \cdots A_{\alpha_i j} \cdots A_{\alpha_j i} \cdots A_{\alpha_n n}$$

D_B apresenta os mesmos termos de D_A exceto pela inversão de paridade devido a haver uma troca a mais nas permutações de D_B

$$\Rightarrow D_B = -D_A$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.1

Matriz Quadrada com Duas Linhas (Cols) Iguais Tem Determinante Nulo

Demonstração : Tome a matriz com 2 linhas (colunas) iguais.
Troque as linhas (colunas) iguais.
A matriz não se altera nem seu determinante.
Mas, com Teor 1.5, o determinante troca sinal.
Logo é Zero. O único número que, trocando sinal, mantém-se igual.

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.2

Matriz com Duas Linhas (Cols) Proporcionais Tem Determinante Nulo

Demonstração : Seja a matriz com colunas *i* e *j* proporcionais

Col. *i*

Col *j*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \lambda\underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{T.1.3}{\Rightarrow} D_A = \lambda\, DET\left(\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix} \right)$$

$$\overset{T.1.5}{\Rightarrow} D_A = \lambda * 0 = 0$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.3

Matriz com Linha (Coluna) Combinação Linear das demais Linhas (Colunas) Tem Determinante Nulo

Demonstração : Seja matriz com col. *i* como C.L. das demais

Col. *i*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \sum_{k \neq i}^{n} \lambda_k \underline{A}_k & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

Na col. *i* há a col. *k* repetida

$$\overset{T.1.4}{\Rightarrow} D_A = \sum_{k \neq i}^{n} \lambda_k DET\left(\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_k & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix} \right) = \sum_{k \neq i}^{n} \lambda_k * 0 = 0$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.4

Em Matriz Quadrada, o Vetor de Cofatores de uma Coluna (Linha) é Ortogonal às demais Colunas (Linhas)

Demonstração : Sejam matriz A, *n x n*, e matriz de cofatores; Matriz B, com col. *i* repetida na col. *j* ; pelo C.1.5.1, tem $D_B=0$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_1 & \underline{\Omega}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_j & \cdots & \underline{\Omega}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$D_A = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\Omega_{kj}^{(A)} = \underline{A}_j^T \underline{\Omega}_j^{(A)}$$

Laplace via Coluna *j*

$$D_B = \sum_{k=1}^{n} B_{kj}\Omega_{kj}^{(B)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\Omega_{kj}^{(A)} = \underline{A}_i^T \underline{\Omega}_j^{(A)} = 0 \Rightarrow \underline{A}_i \perp \underline{\Omega}_j \;\; (i \neq j)$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.4

Em Matriz Quadrada, o Vetor de Cofatores de uma Coluna (Linha) é Ortogonal às demais Colunas (Linhas)

Consolidando Corolário 1.5.4

$$\underline{\underline{A}} = \left[\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_i \quad \cdots \quad \underline{A}_j \quad \cdots \quad \underline{A}_n\right] \qquad \underline{\underline{\Omega}} = \left[\underline{\Omega}_1 \quad \underline{\Omega}_2 \quad \cdots \quad \underline{\Omega}_j \quad \cdots \quad \underline{\Omega}_n\right]$$

Laplace via Coluna *j*

$$D_A = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\Omega_{kj} = \underline{A}_j^T \underline{\Omega}_j$$

$$\underline{A}_i^T \underline{\Omega}_j = 0 \Rightarrow \underline{A}_i \perp \underline{\Omega}_j \quad (i \neq j)$$

Laplace via Linha *k*

$$D_A = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\Omega_{kj} = \underline{A\big|}_k^T \underline{\Omega\big|}_k$$

$$\underline{A\big|}_i^T \underline{\Omega\big|}_k = 0 \Rightarrow \underline{A\big|}_i \perp \underline{\Omega\big|}_k \quad (i \neq k)$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Troca de Linhas (Cols) Troca Sinal do Det. **Teorema 1.5**

Corolário 1.5.5

Em Matriz Quadrada, a soma de coluna (linha) multiplicada por número a outra coluna (linha) não altera o Determinante.

Demonstração para colunas (com linhas é análogo) :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \left(\underline{A}_j + \lambda \underline{A}_i\right) & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{T.1.4}{\Rightarrow} D_B = DET\left(\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}\right) +$$

$$+ \lambda DET\left(\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_i & \cdots & \underline{A}_n \end{bmatrix}\right) \quad \overset{C.1.5.1}{\Rightarrow} D_B = D_A$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Determinante de Matriz Diagonal ou Triangular é Igual ao Produto dos Termos da Diagonal Principal. **Teorema 1.6**

Demonstração p/ Matriz Triangular já que toda matriz diagonal é triangular. Basta tomar uma matriz triangular típica:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow D_A = A_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D_A = A_{11}(-1)^{1+1} A_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D_A = A_{11} A_{22} A_{33} A_{44}$$

Usando Apenas Laplace na Coluna *1*

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Cálculo de Determinantes :

 # Usar operações linha de pivotamento (da esquerda para direita e de cima para baixo) que não alteram ou que alteram de forma conhecida, o determinante, buscando forma triangular;

 # Operações Usadas :

(A) Troca de linhas para substituir pivô nulo;

(B) Multiplicar linha do pivô por número e somar a outra linha para anular elemento na coluna do pivô;

 # Ao atingir a forma triangular, o determinante final é dado pelo produto da diagonal.

 # Para obter o determinante original, trocar o sinal do determinante triangular tantas vezes quanto utilizada a operação (A).

Cálculo de Determinantes Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Cálculo de Determinantes — Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ação Pivô 1 :
Coluna 1 Pivotada,
Determinante Inalterado

Cálculo de Determinantes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pivô 2 Nulo : Troca de Linhas 2 e 4

$$\Downarrow$$

Ação Pivô 2 :
Coluna 2 Pivotada,
Determinante Troca Sinal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Determinantes — Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Ação Pivô 3 :
Coluna 3 Pivotada,
Determinante Triangular

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow D_A = (-1) * 1 * 2 * 2 * (-1.5) = 6$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Cálculo de Determinantes : Esforço numérico

$$Multiplicações = n(n-1)+(n-1)(n-2)+...+(2)(1)$$

$$Multiplicações = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) \quad = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Multiplicações = \frac{n^3 - n}{3} \cong \frac{n^3}{3}$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Cálculo de Determinantes : Esforço numérico

$$Multiplicações = \frac{n^3 - n}{3} \cong \frac{n^3}{3}$$

n	Multiplicações Via Definição $(n\text{-}1)n!$	Multiplicações via Cálculo $(n^3\text{-}n)/3$
5	480	40
10	5.10^6	330
15	2.10^{12}	1120

Determinante do Produto de Matrizes é igual ao Produto dos Respectivos Determinantes. **Teorema 1.7**

$$DET(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = DET(\underline{\underline{A}}).DET(\underline{\underline{B}})$$

Corolário 1.7.1

Determinante de Multi-Produto Matricial

$$DET(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) = DET((\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}})) =$$

$$DET(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) = DET(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}).DET(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) =$$

$$DET(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) = DET(\underline{\underline{A}}).DET(\underline{\underline{B}}).DET(\underline{\underline{C}}).DET(\underline{\underline{D}})$$

Cap. I : Análise Matricial
3. Determinantes

Derivada de determinante *n x n* é a soma de *n* determinantes em que cada coluna (linha) é diferenciada por vez. **Teorema 1.8**

Demonstração para colunas (com linhas é análogo) :

$$\underline{\underline{A}}(t)=\begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \cdots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \cdots & A_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad D_A(t)=D_A(A_{11}(t),\cdots,A_{nn}(t))=\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\Omega_{ij}$$

$$\frac{dD_A}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{dA_{ij}}{dt}\left(\frac{\partial D_A}{\partial A_{ij}}\right)_{A_{km}\neq A_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{dA_{ij}}{dt}\Omega_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dA_{ij}}{dt}\Omega_{ij}\right)$$

$$\frac{dD_A}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dA_{ij}}{dt}\Omega_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}DET\left(\begin{bmatrix}\underline{A}_1 & \cdots & \frac{d}{dt}\underline{A}_j & \cdots & \underline{A}_n\end{bmatrix}\right)$$

Cap. I : Análise Matricial
4. Dependência e Independência Linear de Vetores

Sejam *m* Vetores *(n x 1)* $\underline{A}_{\underline{k}}$. Estes Vetores são Linearmente Dependentes (LD) ou Linearmente Independentes (LI) de acordo com : **Definição**

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \cdots, \underline{A}_m \;\; LD \Rightarrow \exists \; \underline{\alpha} \neq \underline{0} \;\; Tal\, que \; \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underline{A}_k = \underline{0}$$

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \cdots, \underline{A}_m \;\; LI \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underline{A}_k = \underline{0} \;\; somente\ para \;\; \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Cap. I : Análise Matricial
4. Dependência e Independência Linear de Vetores

Seja a matriz *A* não singular *(n x n)*. Então as colunas e as linhas desta matriz são Linearmente Independentes (LI). Teorema 1.9

Demonstração para colunas (para Linhas é Análogo) :

Premissa

$$DET(\underline{\underline{A}}) = DET\left(\left[\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_n\right]\right) \neq 0$$

Queremos provar que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{A}_k = \underline{0} \;\; somente\ para\ \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Hipótese: Admita colunas LD

$$\exists\ \underline{\alpha} \neq \underline{0} \;\; com \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{A}_k = \underline{0}$$

Assim algum destes $\underline{A}_i$ é C.L. dos demais

$$\underline{A}_i = -\frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{k \neq i}^{n} \underline{A}_k\right)$$

Mas, Pelo C.1.5.3, *DET(A)=0*, Contrariando a Premissa acima

Cap. I : Análise Matricial

4. Dependência e Independência Linear de Vetores

Prova-se, adicionalmente, o converso disto: Se as colunas (e as linhas) desta matriz são Linearmente Independentes (LI), a matriz *A* é não singular *(n x n)*. **Teorema 1.9b**

Com Teoremas 1.9 e 1.9b, Tem-se a Equivalência :

$$\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_n \;\; LI \iff DET(\underline{\underline{A}}) \neq 0$$

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Definição**

 # Como as Operações Linha utilizadas para cálculo de determinantes no Item 3, não são capazes de anular determinantes (nem os sub-determinantes existentes), elas podem ser usadas para Determinar o Posto de Matrizes; isto é, o Posto é Invariante à Triangulização por Pivotamento.
 # O Algoritmo procede de forma similar ao utilizado para cálculo de Determinantes visando-se forma final Triangular.
 # O Posto é interpretado ao final da triangulização pela sua Definição; isto é, como o Maior Sub-Determinante Não-Nulo Existente.
 # Operações Coluna também podem ser usadas se necessário.

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Exemplo**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ação Pivô 1 :
Coluna 1 Pivotada,
Determinante Inalterado
Posto Inalterado

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ação Pivô 2 :
Coluna 2 Pivotada,
Determinante Inalterado
Posto Inalterado

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pivô 3 Nulo
Troca de Linhas 3 e 4

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não há Ação do Pivô 3. A Triangulização Chega ao Fim. Determinante Troca Sinal. Posto Inalterado

Cap. I : Análise Matricial
5. Posto

O Posto de uma Matriz é a Ordem do Maior Sub-Determinante não Nulo Existente nesta Matriz. **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O Posto Final é 3. O Maior Sub-determinante Não Nulo é *3 x 3*, como o produto da Triangulização (DET=1) mostrado. Qualquer outro Sub-determinante será singular ou terá ordem 3.

Portanto, como o Posto Inicial é igual ao Posto Final, a Matriz Original tem Posto 3.

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

Seja a Matriz *A (n x n)*. Analisamos as condições acerca da matriz inversa de *A*. **Definição**

$$\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$$

Inversa à Esquerda

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}$$

Inversa à Direita

Se a Matriz *A (n x n)* tem inversa, então a Inversa à esquerda é igual à Inversa à direita. **Teorema 1.10a**

Demonstração

$$\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}\ ,\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} \Rightarrow \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}\right) = \underline{\underline{D}} \Rightarrow \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}$$

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

Se *A (n x n)* tem inversa, então Ela é Única. **Teorema 1.10b**

Demonstração, por absurdo, admita duas Inversas Distintas:

$$\underline{\underline{U}}\ ,\underline{\underline{V}}\ (\underline{\underline{U}} \neq \underline{\underline{V}}\ )\ Inversas\ de\ \underline{\underline{A}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}} \Rightarrow \underline{\underline{U}}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}\right) = \underline{\underline{V}} \Rightarrow \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}$$

Logo se Existir, só Há uma Inversa

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

***A*, *B* (*n x n*) têm inversa, então :** **Teorema 1.11**

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$$

Demonstração

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1} \;\Rightarrow\; (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$$

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

A $(n \times n)$ tem inversa, então : **Teorema 1.12**

$$(\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T$$

Demonstração

$$\underline{\underline{A}}^T(\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = \underline{\underline{I}} \overset{T}{\Rightarrow} \left((\underline{\underline{A}}^T)^{-1}\right)^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \left((\underline{\underline{A}}^T)^{-1}\right)^T \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\left((\underline{\underline{A}}^T)^{-1}\right)^T = \underline{\underline{A}}^{-1} \overset{T}{\Rightarrow} (\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^T$$

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

A (n x n) **tem inversa, então :** **Teorema 1.12**

$$(\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T$$

Corolário 1.12.1

A (n x n)**, simétrica, tem inversa; então a inversa é simétrica.**

Demonstração com T.1.12

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \\ (\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \ \textit{Simétrica}$$

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

Expressão da Inversa de *A (n x n)* Não Singular Teorema 1.13

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{D_A}\left(\underline{\underline{\Omega}}^{(A)}\right)^T \qquad \left\{ D_A \neq 0 \right.$$

$$\underline{\underline{A}} = \left[\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_n\right]$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^{(A)} = \left[\underline{\Omega}_1 \quad \underline{\Omega}_2 \quad \cdots \quad \underline{\Omega}_n\right]$$

Expressão da Inversa de *A (n x n)* Não Singular Teorema 1.13

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{D_A}\underline{\underline{\Omega}}^T \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}\underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n\end{bmatrix} , \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix}\underline{\Omega}_1 & \underline{\Omega}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_n\end{bmatrix}$$

Demonstração por Substituição Direta na Identidade da Inversão

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D_A}\underline{\underline{\Omega}}^T\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D_A}\begin{bmatrix}\underline{\Omega}_1^T \\ \underline{\Omega}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\Omega}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n\end{bmatrix} = \frac{1}{D_A}\begin{bmatrix}\underline{\Omega}_1^T\underline{A}_1 & \underline{\Omega}_1^T\underline{A}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_1^T\underline{A}_n \\ \underline{\Omega}_2^T\underline{A}_1 & \underline{\Omega}_2^T\underline{A}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_2^T\underline{A}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\Omega}_n^T\underline{A}_1 & \underline{\Omega}_n^T\underline{A}_2 & \cdots & \underline{\Omega}_n^T\underline{A}_n\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D_A}\underline{\underline{\Omega}}^T\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D_A}\begin{bmatrix}D_A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_A\end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \qquad \{D_A \neq 0$$

Cap. I : Análise Matricial
6. Matriz Inversa

Inversa de *A (n x n)* Não Singular **Exemplo**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_A = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Omega_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \Omega_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \Omega_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ \Omega_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Omega_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \Omega_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \Omega_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ \Omega_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \Omega_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Sistema Linear de *n* Equações em *m* Variáveis Definição

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}} & (n\,x\,m) \\ \underline{X} & (m\,x\,1) \\ \underline{B} & (n\,x\,1) \end{cases} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

Sistema Linear de *n* Equações em *m* Variáveis   Definição

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}} & (n\,x\,m) \\ \underline{X} & (m\,x1) \\ \underline{B} & (n\,x1) \end{cases} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

Formas Equivalentes

$$\sum_{j=1}^{m} \underline{A}_j X_j = \underline{B} \Rightarrow \begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots A_{1m}X_m = B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots A_{2m}X_m = B_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \cdots A_{nm}X_m = B_n \end{cases}$$

Cap. I : Análise Matricial
7. Sistema Linear de Equações

Sistema Linear **Análise de Solução**

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \underline{A}_j X_j = \underline{B}$$

Condição Necessária e Suficiente para Solução :

$\underline{B}$ pode ser expresso como Combinação Linear das Colunas $\underline{A}_1$ ... $\underline{A}_m$

Posto(A)=Posto([A B])

$$Posto\left(\underline{\underline{A}}\right) = Posto\left(\left[\underline{\underline{A}}\ \ \underline{B}\right]\right) = p \Rightarrow Sistema\ \ Tem\ \ Solução$$

$$Posto\left(\underline{\underline{A}}\right) = p < Posto\left(\left[\underline{\underline{A}}\ \ \underline{B}\right]\right) \Rightarrow Sistema\ \ Sem\ \ Solução$$

Cap. I : Análise Matricial
7. Sistema Linear de Equações

Sistema Linear **Graus de Liberdade na Solução**

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}} & (n\,x\,m) \\ \underline{X} & (m\,x\,1) \\ \underline{B} & (n\,x\,1) \end{cases}$$

Posto de *A* : *p*

***p* Colunas L.I. em *A*. Admitimos as *p* primeiras**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \cdots & \underline{A}_p & \underline{A}_{p+1} & \cdots & \underline{A}_m \end{bmatrix}$$

***p* Colunas L.I.**

***m-p* Colunas L.D.**

Cap. I : Análise Matricial
7. Sistema Linear de Equações

Sistema Linear — Análise de Solução

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \underline{A}_j X_j = \underline{B} - \sum_{k=p+1}^{m} \underline{A}_k X_k$$

Há *m-p* Graus de Liberdade na Solução $X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_m$

$$a\ cada\ \ X_{p+1}, \cdots, X_m \Rightarrow \underline{B} - \sum_{k=p+1}^{m} \underline{A}_k X_k \Rightarrow X_1, \cdots, X_p$$

O Lugar de Soluções é Hiperplano *m-p* Dimensional no R^m

Se *p=m* a Solução é 0-Dimensional, i.e. é um Ponto no R^m

Sistema Linear — Resumo da Análise de Solução

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B}$$

$$\otimes \quad Posto\left(\underline{\underline{A}}\right) = p = Posto\left(\left[\underline{\underline{A}} \;\; \underline{B}\right]\right) \Rightarrow Sistema \;\; Tem \;\; Solução$$

$$\otimes \quad m = p \Rightarrow Solução \;\; Única : Um \;\; Ponto \;\; \underline{X} \;\; no \;\; R^m$$

$$\otimes \quad m > p \Rightarrow Infinitas \;\; Soluções$$

$$em \;\; Hiperplano \;\; m - p \;\; Dimensional \;\; no \;\; R^m$$

Sistema Linear — Obtenção e Análise da Solução

\# Usar as operações linha sobre a Matriz Aumentada *[A* ***B****]* do sistema visando a diagonalização com pivôs = 1 na matriz *A*;

\# O Algoritmo é similar ao de Determinantes, mas visa-se forma final Diagonal com Pivôs Unitários. Postos são Conservados.

\# Operações Usadas:

(A) Troca com linha abaixo de um pivô nulo para substituí-lo;

(B) Dividir linha do pivô pelo mesmo para transformá-lo em 1;

(C) Multiplicar linha do pivô=1 por número e somar a outra linha para anular elemento acima e abaixo nesta coluna;

\# A Solução surge ao final na Coluna ***B****;*

\# Análise de Postos podem ser feitos simultaneamente.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Tableau\ \ Aumentado$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$Pivô 1\ (Normalizado)$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Normaliza\ \ Pivô\ 2$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Pivô\ 2$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$Normaliza\ \ Pivô 3$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$Pivô 3$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$Posto(\underline{\underline{A}}) = 3 = Posto([\underline{\underline{A}}\,\underline{B}])$$

$$Há\ \ Solução\ com\ 2\,G.L.$$

$$m = 5 > p = 3 \Rightarrow m - p = 2$$

$$Var.Básicas: X_1, X_2, X_3$$

$$Var.Não\ Bás.: X_4, X_5$$

$$X_4 = \alpha, X_5 = \beta, X_1 = -\alpha - \beta$$

$$X_2 = 0,\ X_3 = 1 + \alpha$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
7. Sistema Linear de Equações

Utilização para Inversão de Matrizes Quadradas Não singulares

$$\underline{\underline{A}} = \left[\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_n \right]$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left[\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \cdots \quad \underline{X}_n \right]$$

$$\underline{\underline{A}} \left[\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \cdots \quad \underline{X}_n \right] = \left[\underline{I}_1 \quad \underline{I}_2 \quad \cdots \quad \underline{I}_n \right] = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{A}} \left| \underline{I}_1 \quad \underline{I}_2 \quad \cdots \quad \underline{I}_n \right.$$

$$\underline{\underline{A}} \left| \underline{\underline{I}} \right. \Rightarrow \underline{\underline{I}} \left| \underline{\underline{A}}^{-1} \right.$$

Inversão de Matrizes Não singulares — Exemplo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tableau

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pivô 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Normaliza Pivô 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pivô 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Normaliza Pivô 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

Pivô 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Cap. I : Análise Matricial
7. Sistema Linear de Equações

Resolução de Sistemas Quadrados Não Singulares via Inversão

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{A}}\ n\,x\,n,\ Posto(\underline{\underline{A}}) = n \\ \underline{X}\ n\,x\,1 \\ \underline{B}\ n\,x\,1 \end{cases}$$

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{B}$$

Cap. I : Análise Matricial

8. Método Newton-Raphson para Equações Não Lineares

Passo Chave : Linearização Iterada em Estimativa da Solução

$$\underline{F}(\underline{X}) = \underline{0} \qquad \begin{cases} \underline{F} \ n \ x \ 1 \\ \underline{X} \ n \ x \ 1 \end{cases} , \quad \underline{X}^{(0)} \ \{ Estimativa \ \ Solução$$

$$\underline{\underline{J}} = \left[\underline{\nabla}_X \underline{F}^T \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \ \{ Matriz \ \ Jacobiana \ \ das \ \ Eqs.$$

1. $Entrar \ \underline{X}^{(0)}; \ n = 0$
2. $Calc. \ \underline{F}^{(n)} = \underline{F}(\underline{X}^{(n)}); \ \ Calc. \ \underline{\underline{J}} = \left[\underline{\nabla}_X \underline{F}^T \right]^T \ em \ \underline{X}^{(n)}$
3. $\underline{F}(\underline{X}) \cong \underline{F}^{(n)} + \underline{\underline{J}}(\underline{X} - \underline{X}^{(n)}) = \underline{0}$
4. $\underline{F}^{(n)} + \underline{\underline{J}}(\underline{X} - \underline{X}^{(n)}) = \underline{0} \ \Rightarrow \ \underline{X}^{(n+1)} = \underline{X}^{(n)} - \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{F}^{(n)}$
5. $Se \ \left| \underline{X}^{(n+1)} - \underline{X}^{(n)} \right| \le \varepsilon \Rightarrow Fim; \ \underline{X} = \underline{X}^{(n+1)}$
6. $n = n + 1; \ Voltar \ \ a \ \ 2.$

Cap. I : Análise Matricial
8. Método Newton-Raphson para Equações Não Lineares

$$\underline{F}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 \\ 10X_1 - X_2X_3 \\ 4X_1 - X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad , \quad \underline{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{J}}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} 2X_1 & 2X_2 & -2X_3 \\ 10 & -X_3 & -X_2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Solução
$\underline{X}^T = \underline{0}^T$

$n = 0$

$$\underline{F}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{J}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 10 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} , \quad \left[\underline{\underline{J}}^{(0)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -1 \\ 0.125 & 0.875 & -2.25 \\ -0.125 & 1.125 & -2.75 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}^{(1)} = \underline{X}^{(0)} - \left[\underline{\underline{J}}^{(0)}\right]^{-1} \underline{F}^{(0)} \Rightarrow \underline{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3.375 \\ -4.625 \end{bmatrix}$$

$n = 1$

$$\underline{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 \\ -35.6094 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{J}}^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & -6.75 & 9.25 \\ 10 & 4.625 & 3.375 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}^{(2)} = \underline{X}^{(1)} - \left[\underline{\underline{J}}^{(1)}\right]^{-1} \underline{F}^{(1)} \Rightarrow \underline{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.61653 \\ -0.89661 \\ -1.5695 \end{bmatrix} \Rightarrow Etc$$