TECNOLOGIA DE PROCESSOS QUÍMICOS E BIOQUÍMICOS - TPQBq
EQE-703 Métodos Matemáticos Aplicados (2007-3) – J.Luiz e Ofélia
Lista 5 : Método de Separação de Variáveis para EDP-2 (Cap. V)

1. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x,y)$:

$$x^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + xy\Psi = \frac{x^3 + y^2}{x + y}$$
$$x \in \Re^+, y \in \Re^+$$

2. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x,y,z)$:

$$x^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (x + y + z)\Psi = 0$$
$$x \in \Re, y \in \Re$$

3. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x_1, x_2, x_3)$:

$$K_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \Psi = 0$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \Re^3$$

$$K_{11} = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\ ,\ K_{12} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{\underline{B}}\,\underline{x}}\ ,\ \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

4. É representado na Fig. 1 abaixo um meio de cultura infinito nas dimensões *(y,z)* com espessura *L* ao longo do eixo *x*; isto é, o meio estende-se desde $x = 0$ a $x = L$. O meio contém material gelatinoso *B* e um soluto *A* capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em $x = 0$ e em $x = L$, estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas locações (isto é, lá o fluxos difusivos são nulos). Em $t = 0$ o meio apresenta distribuição de concentração de *A* (gmol/m^3) de acordo com a Eq. (2), quando inicia-se o processo de contra-difusão das espécies *A* e *B* governada pela EDP-2 na Eq. (1) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad (t \geq 0,\ 0 \leq x \leq L) \tag{1}$$

$$C_A = C_{A0} + (C_{A1} - C_{A0})\left(\frac{x}{L}\right) \tag{2}$$

A partir disto, responda:
(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Re-escreva item (i) após a transformação de variável dependente pela Eq. (3) :

$$\theta = \frac{(C_A - C_{A0})}{C_{A1} - C_{A0}} \tag{3}$$

(iii) Resolver o problema com a separação $\theta(t,x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite $\lim_{t \to \infty} C_A(t,x)$

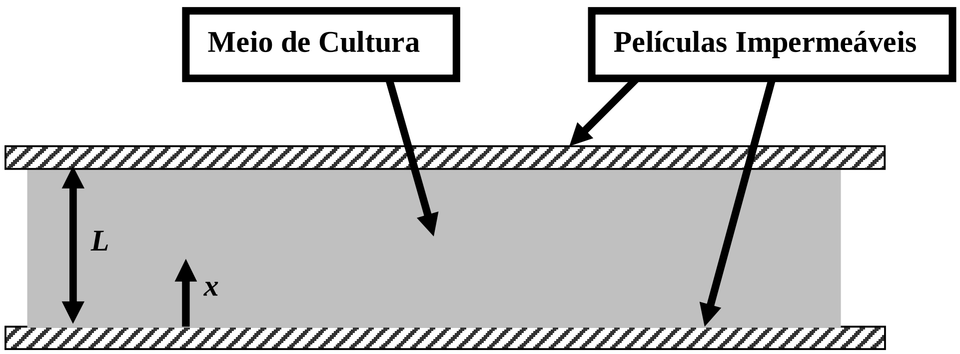

Figura 1

5. É representado na Fig. 2 um meio de cultura infinito nas dimensões *(y,z)* com espessura *L* ao longo do eixo *x*. O meio contém material gelatinoso *B* e um soluto *A* capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em $x = 0$ e em $x = L$, estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas locações. Em $t = 0$ o meio apresenta distribuição de concentração de *A* (gmol/m^3) de acordo com a Eq. (5). Em toda a extensão do meio está disperso e imobilizado um microorganismo capaz de consumir o nutriente com taxa $r = KC_A$ (*r* em gmol/m^3.s, *K* em s^{-1}). Em $t = 0$ inicia-se a contra-difusão das espécies *A* e *B* e o simultâneo consumo de *A* pelo microorganismo, processo este governado pela EDP-2 na Eq. (4) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - KC_A \qquad (t \geq 0,\ 0 \leq x \leq L) \tag{4}$$

$$C_A = \begin{cases} 0 & (x > L/2) \\ C_{A0} & (0 \leq x \leq L/2) \end{cases} \tag{5}$$

A partir disto, responda:

(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Resolver o problema com a separação $C_A(t,x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite $\lim_{t \to \infty} C_A(t,x)$

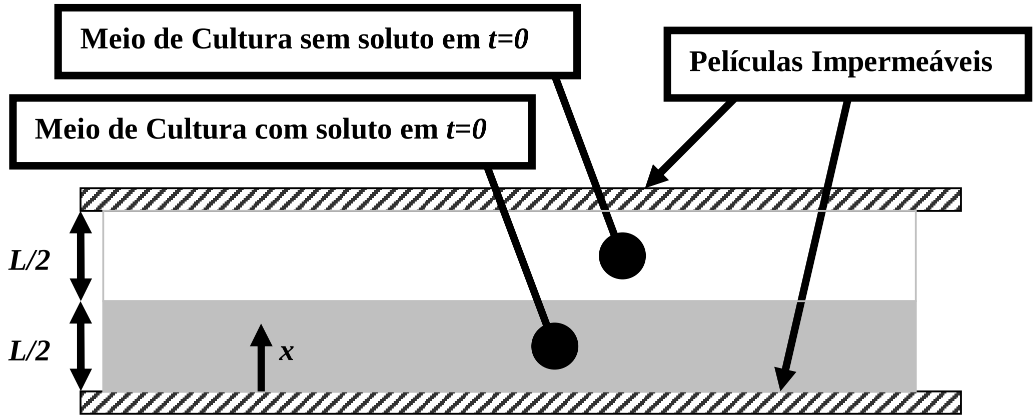

Figura 2

6. Um meio permeável (Fig. 3) de seção quadrada de lado L no plano xy, e infinito na dimensão z, está em contato com quatro soluções em cada uma de suas faces, contendo, respectivamente, as concentrações de espécie A $C_{A1}, C_{A2}, C_{A3}, C_{A4}$ iguais a 1, 2, 3 e 0 gmol/m^3. As soluções estão devidamente isoladas umas das outras por paredes especiais (Fig. 3), fazendo contato apenas com o meio em questão. Aplicando-se a Teoria Clássica da Difusão em Regime Estacionário, obtém-se a EDP-2 (Eq. de Laplace) dada na Eq. (6):

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L) \tag{6}$$

A partir disto:
(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;
(ii) Obter a distribuição $C_A(x, y)$ no interior do meio e esboçá-la graficamente.