

**TECNOLOGIA DE PROCESSOS QUÍMICOS E BIOQUÍMICOS - TPQBq**  
**EQE-703 Métodos Matemáticos Aplicados (2007-3) – J.Luiz e Ofélia**  
**Lista 5 : Método de Separação de Variáveis para EDP-2 (Cap. V)**

1. Classificar a EDP-2 abaixo em  $\Psi(x, y)$ :

$$x^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + xy \Psi = \frac{x^3 + y^2}{x + y}$$

$$x \in \mathfrak{R}^+, y \in \mathfrak{R}^+$$

2. Classificar a EDP-2 abaixo em  $\Psi(x, y, z)$ :

$$x^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (x + y + z) \Psi = 0$$

$$x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}$$

3. Classificar a EDP-2 abaixo em  $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ :

$$K_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \Psi = 0$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^3$$

$$K_{11} = \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}, \quad K_{12} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{B} \underline{x}}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

4. É representado na Fig. 1 abaixo um meio de cultura infinito nas dimensões  $(y, z)$  com espessura  $L$  ao longo do eixo  $x$ ; isto é, o meio estende-se desde  $x = 0$  a  $x = L$ . O meio contém material gelatinoso  $B$  e um soluto  $A$  capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em  $x = 0$  e em  $x = L$ , estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas locações (isto é, lá os fluxos difusivos são nulos). Em  $t = 0$  o meio apresenta distribuição de concentração de  $A$  ( $\text{gmol/m}^3$ ) de acordo com a Eq. (2), quando inicia-se o processo de contra-difusão das espécies  $A$  e  $B$  governada pela EDP-2 na Eq. (1) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

$$C_A = C_{A0} + (C_{A1} - C_{A0}) \left( \frac{x}{L} \right) \quad (2)$$

A partir disto, responda:

(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Re-escreva item (i) após a transformação de variável dependente pela Eq. (3) :

$$\theta = \frac{(C_A - C_{A0})}{C_{A1} - C_{A0}} \quad (3)$$

(iii) Resolver o problema com a separação  $\theta(t, x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} C_A(t, x)$

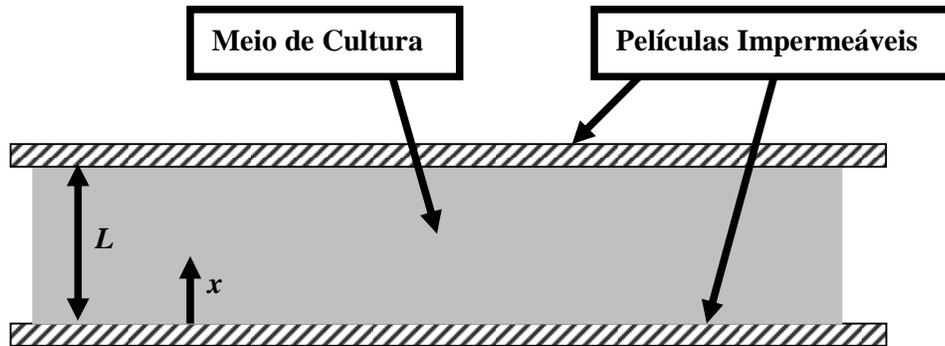


Figura 1

5. É representado na Fig. 2 um meio de cultura infinito nas dimensões  $(y, z)$  com espessura  $L$  ao longo do eixo  $x$ . O meio contém material gelatinoso  $B$  e um soluto  $A$  capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em  $x = 0$  e em  $x = L$ , estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas localidades. Em  $t = 0$  o meio apresenta distribuição de concentração de  $A$  ( $\text{gmol/m}^3$ ) de acordo com a Eq. (5). Em toda a extensão do meio está disperso e imobilizado um microorganismo capaz de consumir o nutriente com taxa  $r = KC_A$  ( $r$  em  $\text{gmol/m}^3 \cdot \text{s}$ ,  $K$  em  $\text{s}^{-1}$ ). Em  $t = 0$  inicia-se a contra-difusão das espécies  $A$  e  $B$  e o simultâneo consumo de  $A$  pelo microorganismo, processo este governado pela EDP-2 na Eq. (4) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - KC_A \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq L) \quad (4)$$

$$C_A = \begin{cases} 0 & (x > L/2) \\ C_{A0} & (0 \leq x \leq L/2) \end{cases} \quad (5)$$

A partir disto, responda:

- (i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;  
(ii) Resolver o problema com a separação  $C_A(t, x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} C_A(t, x)$

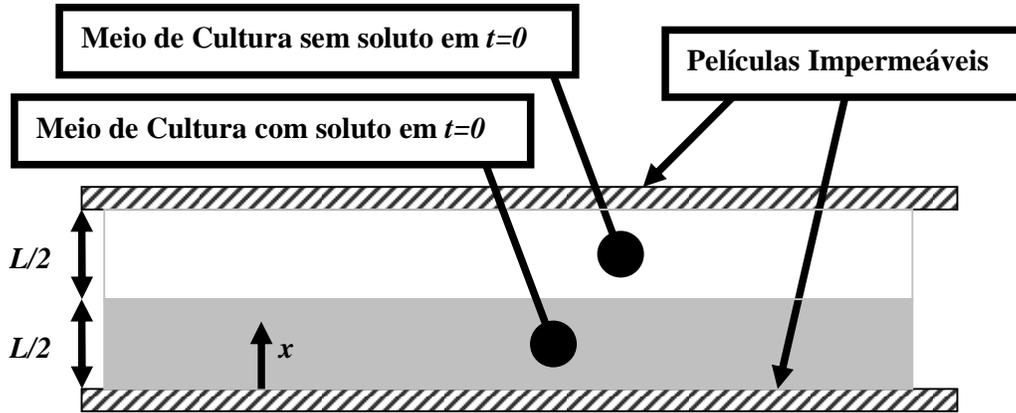


Figura 2

6. Um meio permeável (Fig. 3) de seção quadrada de lado  $L$  no plano  $xy$ , e infinito na dimensão  $z$ , está em contato com quatro soluções em cada uma de suas faces, contendo, respectivamente, as concentrações de espécie  $A$   $C_{A1}$ ,  $C_{A2}$ ,  $C_{A3}$ ,  $C_{A4}$  iguais a 1, 2, 3 e 0  $\text{gmol/m}^3$ . As soluções estão devidamente isoladas umas das outras por paredes especiais (Fig. 3), fazendo contato apenas com o meio em questão. Aplicando-se a Teoria Clássica da Difusão em Regime Estacionário, obtém-se a EDP-2 (Eq. de Laplace) dada na Eq. (6):

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L) \quad (6)$$

A partir disto:

- (i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;
- (ii) Obter a distribuição  $C_A(x, y)$  no interior do meio e esboçá-la graficamente.

