TECNOLOGIA DE PROCESSOS QUÍMICOS E BIOQUÍMICOS - TPQBq
EQE-703 Métodos Matemáticos Aplicados (2007-3) – J.Luiz e Ofélia
Lista 5 : Método de Separação de Variáveis para EDP-2 (Cap. V)

1. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x,y)$:

$$x^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial\Psi}{\partial y}-x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+xy\Psi=\frac{x^3+y^2}{x+y}$$
$$x\in\Re^+, y\in\Re^+$$

2. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x,y,z)$:

$$x^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+y^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+z\frac{\partial\Psi}{\partial z}+(x+y+z)\Psi=0$$
$$x\in\Re, y\in\Re$$

3. Classificar a EDP-2 abaixo em $\Psi(x_1,x_2,x_3)$:

$$K_{11}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+2K_{12}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}+x_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}+\Psi=0$$
$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\Re^3$$
$$K_{11}=\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}\ ,\ K_{12}=\sqrt{\underline{x}^T\underline{\underline{B}}\underline{x}}\ ,\ \underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}4&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&4&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&4\end{bmatrix}\ ,\ \underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}2&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&2&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&2\end{bmatrix}$$

4. É representado na Fig. 1 abaixo um meio de cultura infinito nas dimensões *(y,z)* com espessura *L* ao longo do eixo *x*; isto é, o meio estende-se desde $x = 0$ a $x = L$. O meio contém material gelatinoso *B* e um soluto *A* capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em $x = 0$ e em $x = L$, estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas locações (isto é, lá o fluxos difusivos são nulos). Em $t = 0$ o meio apresenta distribuição de concentração de *A* (gmol/m^3) de acordo com a Eq. (2), quando inicia-se o processo de contra-difusão das espécies *A* e *B* governada pela EDP-2 na Eq. (1) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}=D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}\qquad (t\geq 0,\ 0\leq x\leq L) \tag{1}$$
$$C_A=C_{A0}+(C_{A1}-C_{A0})\left(\frac{x}{L}\right) \tag{2}$$

A partir disto, responda:
(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Re-escreva item (i) após a transformação de variável dependente pela Eq. (3) :

$$\theta = \frac{(C_A - C_{A0})}{C_{A1} - C_{A0}} \tag{3}$$

(iii) Resolver o problema com a separação $\theta(t,x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite $\lim_{t \to \infty} C_A(t,x)$

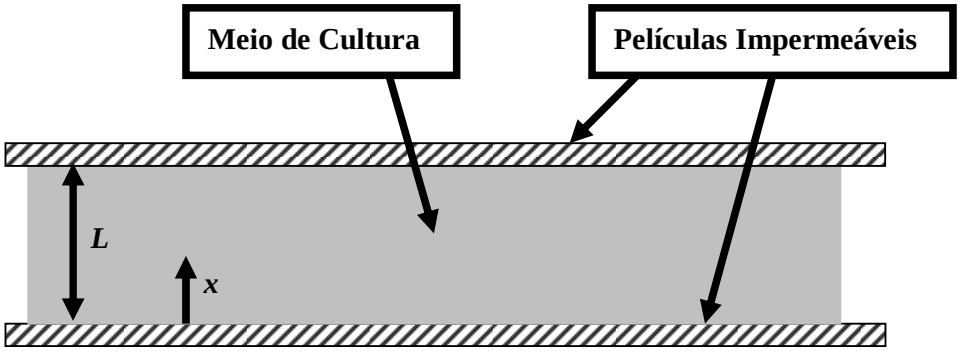


Figura 1

5. É representado na Fig. 2 um meio de cultura infinito nas dimensões *(y,z)* com espessura *L* ao longo do eixo *x*. O meio contém material gelatinoso *B* e um soluto *A* capaz de sofrerem transferência por contra-difusão. Ambas as faces do meio, a saber em $x = 0$ e em $x = L$, estão recobertas por películas impermeáveis que impedem transferência de massa nestas locações. Em $t = 0$ o meio apresenta distribuição de concentração de *A* (gmol/m^3) de acordo com a Eq. (5). Em toda a extensão do meio está disperso e imobilizado um microorganismo capaz de consumir o nutriente com taxa $r = KC_A$ (*r* em gmol/m^3.s, *K* em s^{-1}). Em $t = 0$ inicia-se a contra-difusão das espécies *A* e *B* e o simultâneo consumo de *A* pelo microorganismo, processo este governado pela EDP-2 na Eq. (4) abaixo:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - KC_A \qquad (t \geq 0,\ 0 \leq x \leq L) \tag{4}$$

$$C_A = \begin{cases} 0 & (x > L/2) \\ C_{A0} & (0 \leq x \leq L/2) \end{cases} \tag{5}$$

A partir disto, responda:

(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Resolver o problema com a separação $C_A(t,x) = T(t).X(x)$

(iv) Obter o limite $\lim_{t \to \infty} C_A(t,x)$

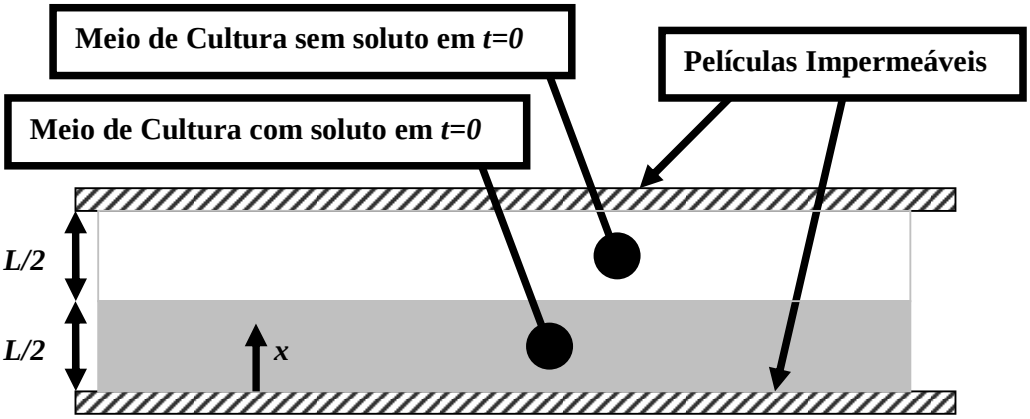
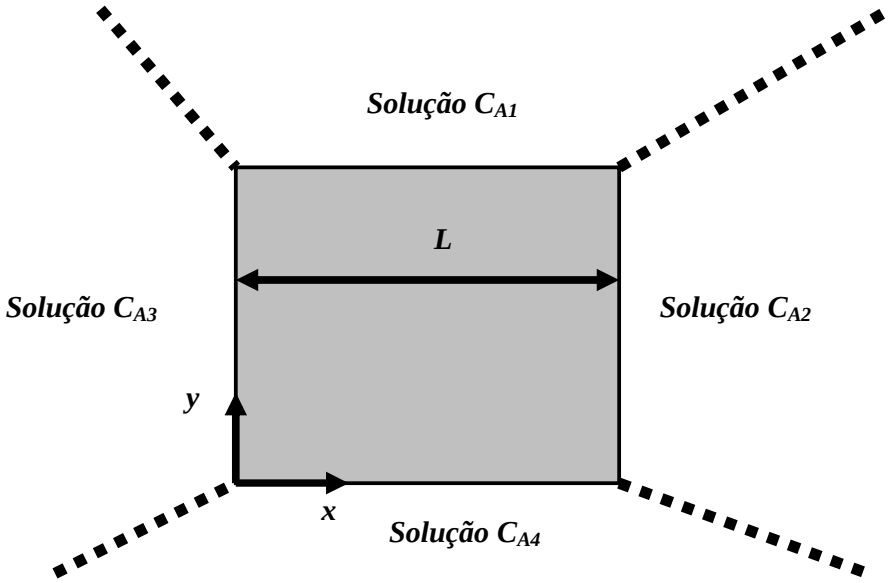


Figura 2

6. Um meio permeável (Fig. 3) de seção quadrada de lado *L* no plano *xy*, e infinito na dimensão *z*, está em contato com quatro soluções em cada uma de suas faces, contendo, respectivamente, as concentrações de espécie *A* $C_{A1}, C_{A2}, C_{A3}, C_{A4}$ iguais a 1, 2, 3 e 0 gmol/m^3. As soluções estão devidamente isoladas umas das outras por paredes especiais (Fig. 3), fazendo contato apenas com o meio em questão. Aplicando-se a Teoria Clássica da Difusão em Regime Estacionário, obtém-se a EDP-2 (Eq. de Laplace) dada na Eq. (6):

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L) \qquad (6)$$

A partir disto:

(i) Formalizar o problema apresentando EDP e condições;

(ii) Obter a distribuição $C_A(x,y)$ no interior do meio e esboçá-la graficamente.