

DISCIPLINA

Métodos Matemáticos Aplicados a Processos Químicos e Bioquímicos

Capítulo IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

José Luiz de Medeiros e Ofélia Q.F. Araújo
Engenharia Química – UFRJ
jlm@eq.ufrj.br, ofelia@eq.ufrj.br
Tel. 21-2562-7535

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

x : Variável independente

$\{\phi_n(x)\}$: Família infinita ($n = 0, 1, 2, \dots$) de funções de x em $[a, b]$

$p(x)$: Função peso da família de funções ($p(x) \geq 0$)

$[a, b]$: Intervalo ($\subset \mathfrak{R}$) associado à família de funções $\{\phi_n(x)\}$

$Q.I.$: Sigla para função de Quadrado Integrável

\perp : Símbolo para família ortogonal de funções $\{\phi_n(x)\}$

$S.F.$: Série de Fourier

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Função Par e Função Ímpar :

$F(x)$ é Par $\Rightarrow F(-x) = F(x)$ Ex. $F(x) = x^2$, $F(x) = \cos(x)$

$F(x)$ é Ímpar $\Rightarrow F(-x) = -F(x)$ Ex. $F(x) = x^3$, $F(x) = \sin(x)$

$F(x)$ é Ímpar e Contínua $\Rightarrow F(0) = 0$

Demonstração : $F(-x) = -F(x)$; Com $x = 0$:

$F(-0) = -F(0) \Rightarrow F(0) = -F(0) \Rightarrow F(0) = 0$

$F(x)$ é Ímpar $\Rightarrow \int_{-a}^a F(x).dx = 0$

Demonstração : $\int_{-a}^a F(x).dx = \int_{-a}^0 F(x).dx + \int_0^a F(x).dx = \int_0^a F(x).dx - \int_0^a F(x).dx =$

$$\int_0^a F(x).dx + \int_0^a F(-y).dy = \int_0^a F(x).dx - \int_0^a F(y).dy = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Função Q.I.

$F(x)$ é Q.I. em $[a, b]$ sob $p(x)$ quando :

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) dx \text{ existe; i.e. } \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) dx < \infty$$

Exemplo 1 : $g(x) = 1/x$ Não é Q.I. em $[0, 1]$ sob $p(x) = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = +\infty$$

Exemplo 2 : $g(x) = 1/x$ é Q.I. em $[0, 1]$ sob $p(x) = x^2$:

$$\int_0^1 x^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortogonal de Funções

$\{\phi_n(x)\}$ é Família Ortogonal de Funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

1a

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n^2(x) dx = K_n > 0 \quad (n = m)$$

1b **$\{\phi_n(x)\}$ é \perp**

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortogonal de Funções

Exemplo

$\{\text{sen}(nx)\} (n = 1, 2, \dots)$ é Família \perp de Funções Q.I. em $[-\pi, \pi]$ sob $p(x) = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = K_n > 0 \quad (n = m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortogonal de Funções

Exemplo

$\{\text{sen}(nx)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) é Família \perp de Funções Q.I. em $[-\pi, \pi]$ sob $p(x) = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = \frac{\cancel{\text{sen}(nx)} \cos(mx)}{-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx) \cos(mx)}{m/n} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx) \cos(mx)}{m/n} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = \frac{\cancel{\cos}(nx) \text{sen}(mx)}{m^2/n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(nx) \text{sen}(mx)}{m^2/n^2} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = \frac{0}{1 - n^2/m^2} = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortogonal de Funções

Exemplo

$\{\text{sen}(nx)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) é Família \perp de Funções Q.I. em $[-\pi, \pi]$ sob $p(x) = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\text{sen}(2nx)}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) \cdot dx = \pi \quad (n = m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) \cdot dx = \pi > 0 \quad (n = m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortonormal de Funções

$\{\psi_n(x)\}$ é Família Ortonormal de Funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) \cdot \psi_n(x) \cdot \psi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

2a

$$\int_a^b p(x) \cdot \psi_n^2(x) dx = 1 \quad (n = m)$$

2b

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Converter Família Ortogonal de Funções em Família Ortonormal

$\{\phi_n(x)\}$ é Família Ortogonal de Funções Q.I. em $[a, b]$ sob $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n^2(x) dx = K_n > 0 \quad (n = m)$$

$$\text{Definindo-se } \psi_n(x) = \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{K_n}}$$

Teremos $\{\psi_n(x)\}$ tal que :

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Converter Família Ortogonal de Funções em Família Ortonormal

$$\int_a^b p(x) \cdot \psi_n(x) \cdot \psi_m(x) dx = \frac{1}{\sqrt{K_n K_m}} \int_a^b p(x) \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x) \cdot \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{K_n} \int_a^b p(x) \cdot \phi_n^2(x) dx = \frac{K_n}{K_n} = 1$$

$\{\psi_n(x)\}$ é Ortonormal

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

1. Definições

Família Ortonormal de Funções

Exemplo

$\{ \text{sen}(nx) \} (n = 1, 2, \dots)$ é Família \perp de Funções Q.I. em $[-\pi, \pi]$ sob $p(x) = 1$

$$\text{Definindo - se } \psi_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = K_n = \pi \right.$$

$\left\{ \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$ é Família Ortonormal de Funções Q.I. em $[-\pi, \pi]$, sob $p(x) = 1$

pois

$$\int_a^b p(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x) \cdot \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{sen}^2(nx) dx = 1$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

#1: Considere $F(x)$ Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$

$F(x)$ Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) dx < \infty$$

#2: Considere a Família Ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ em $[a,b]$ sob $p(x)$

$\{\phi_n(x)\}$ é Família \perp de Funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x) \cdot \phi_n^2(x) dx = K_n > 0 \quad (n = m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

#3: Considere a Série Infinita $E(x)$ construída com $\{\phi_n(x)\}$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

3

Note que a Série de $E(x)$ poderá não convergir para certos x ou mesmo para nenhum x . Naturalmente, admitimos o contrário ...

#4: Considere o Resíduo de $E(x)$ com respeito a $F(x)$

$$\mathfrak{J}(x) = F(x) - E(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

#5: Considere a Medida da falta de aderência de $E(x)$ a $F(x)$:

$$\mathcal{E} = \int_a^b p(x) \cdot \mathfrak{J}^2(x) \cdot dx > 0$$

4

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

#6: Calculamos este Funcional de Falta de Aderência a $F(x)$

$$\mathcal{E} = \int_a^b p(x) \left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx$$

5

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x) F(x) \phi_n(x) \cdot dx + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_a^b p(x) \phi_n(x) \phi_m(x) \cdot dx \end{aligned}$$

#7: Devido à Ortogonalidade da Família :

$$\mathcal{E} = \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x) F(x) \phi_n(x) \cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) \cdot dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

#8: Obtemos coeficientes $\{A_n\}$ para maximizar aderência da S.F.

$\text{Min } \mathfrak{S}(x) \text{ na média} \Rightarrow \text{Min } \Xi \Rightarrow \text{Pto. Est. de } \Xi$
 $\{A_n\} \qquad \qquad \{A_n\} \qquad \{A_n\}$

$$P.E. \Xi \Leftrightarrow \frac{\partial \Xi}{\partial A_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$
$$\{A_n\}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

#8: Obtemos coeficientes $\{A_n\}$ para maximizar aderência da S.F.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\mathcal{E} = \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x) F(x) \phi_n(x) \cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) \cdot dx$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_k} = 0 \Leftrightarrow -2 \int_a^b p(x) F(x) \phi_k(x) \cdot dx + 2 A_k \int_a^b p(x) \phi_k^2(x) \cdot dx = 0$$

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x) F(x) \phi_k(x) \cdot dx}{\int_a^b p(x) \phi_k^2(x) \cdot dx} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Coeficientes de Fourier

6

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Série de Fourier de $F(x)$ em $\{\varphi_n(x)\}$

Resumo

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

3

Coeficientes $\{A_n\}$ na Expansão de $F(x)$ em $\{\varphi_n(x)\}$ obtidos de modo a Minimizar o Funcional :

$$\mathcal{E} = \int_a^a p(x) \left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx$$

4

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x) F(x) \phi_k(x) . dx}{\int_a^b p(x) \phi_k^2(x) . dx} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Coeficientes de Fourier

6

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

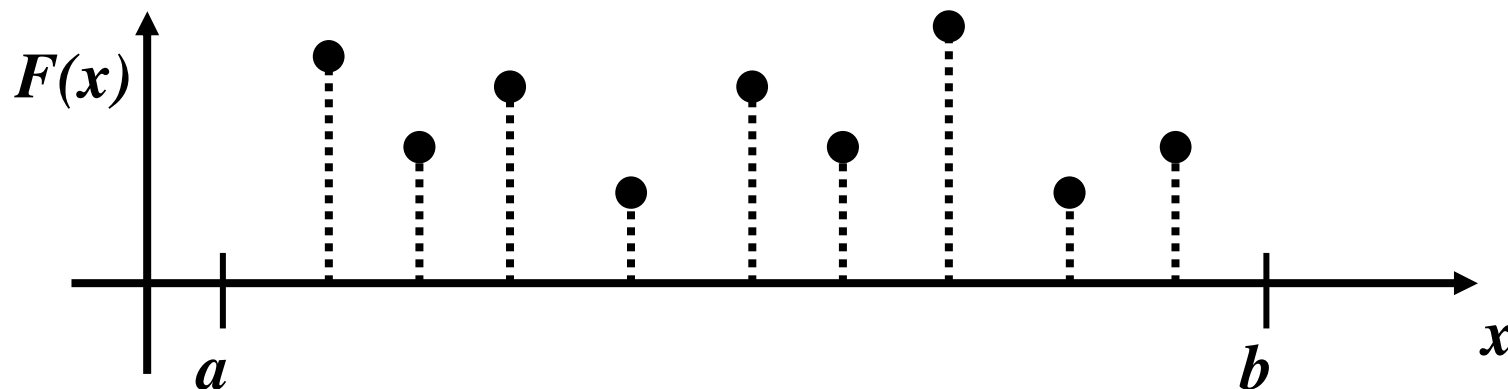
Função Nula

$F(x)$ é Função Nula em $[a, b]$ sob $p(x)$, quando :

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) dx = 0$$

7

Note que $F(x) = 0$ é Função Nula; mas não necessariamente $F(x)$ deve ser *identicamente nula* para ser Função Nula. A função seguinte é uma Função Nula em $[a, b]$ sob $p(x)$ e não é identicamente nula:



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Função Nula

$$F(x) \text{ Função Nula em } [a,b] \text{ sob } p(x) \Rightarrow \int_a^b p(x).F^2(x) dx = 0$$

Observamos também que qualquer função multiplicada por uma Função Nula é também uma Função Nula. Sendo $F(x)$ Função Nula:

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,\dots)$$

8

$\{ \phi_n(x) \}$ Família \perp em $[a,b]$ sob $p(x)$.

Isto é, a Função Nula é Ortogonal a Todos os Membros de uma Família Ortogonal de Funções.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Naturalmente cabe perguntar se a relação (8) valeria também para funções $F(x)$ que não fossem Funções Nulas. Isto é, se haveria $F(x)$ Ortogonal a **toda** uma Família Ortogonal de Funções, onde $F(x)$ não é uma Função Nula.

$$\int_a^b p(x) \cdot F(x) \cdot \phi_n(x) \cdot dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$\{ \phi_n(x) \}$ Família \perp em $[a, b]$ sob $p(x)$.

Neste caso, todos os coeficientes A_n da S.F. de $F(x)$ valem Zero :

$$\Rightarrow A_k = \frac{\int_a^b p(x) F(x) \phi_k(x) \cdot dx}{\int_a^b p(x) \phi_k^2(x) \cdot dx} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

A Família $\{ \cos(nx) \}$ ($n=0,1,2,\dots$) é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$ com $p(x)=1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \cdot dx = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \cdot dx > 0$$

Mas os coeficientes de Fourier da função $F(x) = x$ nesta Família são todos Nulos, embora esta função **Não** seja uma Função Nula :

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x) \cdot dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x) \cdot dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(kx) \cdot dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \cdot dx} = 0 \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

Por que ?

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Como visto, Não Basta a Ortogonalidade da Família $\{\varphi_n(x)\}$ para garantir que qualquer função Q.I. tenha expansão em S.F. sobre os membros da Família.

O que é Necessário é que a Família, além de Ortogonal, seja **Completa** de acordo com a seguinte definição :

A Família de Funções Ortogonais $\{\phi_n(x)\}$ em $[a,b]$ sob peso $p(x)$, é dita ser Completa se a Relação Seguinte Valer apenas para $F(x)$ Função Nula :

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,\dots)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Como visto, Não Basta a Ortogonalidade da Família $\{\varphi_n(x)\}$ para garantir que qualquer função Q.I. possa ter expansão em S.F. sobre os membros da Família.

O que é Necessário é que a Família, além de Ortogonal, seja **Completa** de acordo com a seguinte definição :

A Família de Funções Ortogonais $\{\phi_n(x)\}$ em $[a,b]$ sob peso $p(x)$, é dita ser Completa se a Relação Seguinte Valer apenas para $F(x)$ Função Nula :

$$\int_a^b p(x) \cdot F(x) \cdot \phi_n(x) \cdot dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

i.e. para Todos os Membros da Família !

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Teorema 4.1

Seja a Expansão $E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$ da Função $F(x)$ Q.I.

em termos da Família COMPLETA de Funções Ortogonais $\{\phi_n(x)\}$ em $[a, b]$ sob peso $p(x)$.

Seja a Série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$ Convergente, podendo ser Integrada

Termo a Termo.

Então a Soma da Série $E(x)$ Difere de $F(x)$ no Máximo por uma Função Nula.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Teorema 4.1

Demonstração

Seja o Resíduo da S.F.

$$\mathfrak{I}(x) = F(x) - E(x)$$

$$\mathfrak{I}(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

Para demonstrar o Teorema devemos mostrar que $\mathfrak{I}(x)$ é uma Função Nula; i.e. que $\mathfrak{I}(x)$ é \perp a todos os membros de $\{\phi_n(x)\}$.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Teorema 4.1

Demonstração

Multiplicando $\mathfrak{F}(x)$ por $p(x)\phi_k(x)$ e integrando $\int_a^b (.)dx$:

$$\int_a^b p(x)\mathfrak{F}(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x)\phi_n(x)\phi_k(x)dx$$

Usando a Ortogonalidade da Família :

$$\int_a^b p(x)\mathfrak{F}(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - A_k \int_a^b p(x)\phi_k(x)\phi_k(x)dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Teorema 4.1

Demonstração

$$\int_a^b p(x)\mathfrak{I}(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - A_k \int_a^b p(x)\phi_k(x)\phi_k(x)dx$$

Com os Coeficientes de Fourier :

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\int_a^b p(x)\mathfrak{I}(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Teorema 4.1

Demonstração

$$\int_a^b p(x)\mathfrak{S}(x)\phi_k(x)dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow \mathfrak{S}(x) \text{ é Função Nula}$$

Por tanto

$$F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \equiv \text{Função Nula ou Identicamente Nula}$$

Requisitos :

- (1) $F(x)$ Q.I. em $[a, b]$ sob $p(x)$
- (2) $\{ \phi_n(x) \}$ Ortogonal em $[a, b]$ sob $p(x)$ e Completa
- (3) S.F. Converge e Integrável Termo a Termo

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Definição 4.1 : A Sequência de Funções $S_n(x)$ é dita convergir na média para $F(x)$, Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$, se :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) (F(x) - S_n(x))^2 dx = 0$$

9

Definição 4.2 : Se $S_n(x)$ é a n -ésima Soma Parcial da S.F. de $F(x)$, qualquer Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$, em termos da Família Ortogonal $\{\varphi_n(x)\}$, em $[a,b]$ sob $p(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_k(x)$$

10

e $S_n(x)$ Converge na Média para $F(x)$, então $\{\varphi_n(x)\}$ é **Fechado**.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

A Igualdade de Parseval para Família Ortogonal **Fechada**.
 Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, **Fechada**;
 Seja $F(x)$ Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$; Então vale a Igualdade de
 Parseval abaixo: **Teorema 4.2**

$$\int_a^b p(x)F^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx$$

11

Com Família Ortonormal $\int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx = 1$, tem-se a I.P. clássica:

$$\int_a^b p(x)F^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

12

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

$\{\phi_n(x)\}$ é \perp em $[a, b]$ sob $p(x)$. $\{\phi_n(x)\}$ também é Fechada.

Seja o Aproximante S.F. de $F(x)$ de Ordem N : $S_N(x) = \sum_{n=1}^N A_n \phi_n(x)$

Como $\{\phi_n(x)\}$ é Fechada :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) (F(x) - S_N(x))^2 dx = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \left(F(x) - \sum_{n=1}^N A_n \phi_n(x) \right)^2 dx = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \left(F(x) - \sum_{n=1}^N A_n \phi_n(x) \right)^2 dx = 0$$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b p(x) F^2(x) dx - 2 \sum_{n=1}^N A_n \int_a^b p(x) F(x) \phi_n(x) dx + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N A_k A_n \int_a^b p(x) \phi_k(x) \phi_n(x) dx \right\}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

Devido à Ortogonalidade da Família, a relação torna – se :

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b p(x)F^2(x)dx - 2 \sum_{n=1}^N A_n \int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x)dx + \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx \right\}$$

Com os Coeficientes de Fourier : $A_n = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx}$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b p(x)F^2(x)dx - 2 \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx + \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx \right\}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b p(x) F^2(x) dx - 2 \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx + \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx \right\}$$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b p(x) F^2(x) dx - \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx \right\}$$

$$0 = \int_a^b p(x) F^2(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx$$

$$\int_a^b p(x) F^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

$$\int_a^b p(x) F^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx$$

11

Se, adicionalmente, a Família é Ortonormal : $\int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx = 1$,

tem-se a forma clássica da Igualdade de Parseval :

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

12

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Observação :

Teorema 4.2

A Igualdade de Parseval também poderia ser mostrada para $\{\phi_n(x)\} \perp$ em $[a, b]$ sob $p(x)$ e COMPLETA.

Sendo $\{\phi_n(x)\}$ Completa, $\mathfrak{S}(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n$ é Função Nula.

Pela definição de Função Nula : $\int_a^b p(x) \left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx = 0$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x) \cdot F(x) \cdot \phi_n(x) \cdot dx \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_a^b p(x) \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) \cdot dx
 \end{aligned}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

Pela Ortogonalidade :

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

$$\int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx$$

Com os Coeficientes de Fourier : $A_n = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx}$

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Demonstração :

Teorema 4.2

$$0 = \int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) \cdot dx$$

11

Com Família Ortonormal $\int_a^b p(x) \phi_k^2(x) dx = 1$, tem-se a I.P. Clássica

$$\int_a^b p(x) \cdot F^2(x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

12

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, **Completa**;
Então $\{\varphi_n(x)\}$ é também **Fechado** com respeito ao espaço de
funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$ **Teorema 4.3**

Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, **Fechada** com
respeito ao espaço de funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$.
Então $\{\varphi_n(x)\}$ é também **Completa**. **Teorema 4.4**

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = x$ com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. A Família $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa. **Exemplo 4.1****

Escrevemos $F(x) = x$, $E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{cos}(nx)$

$$A_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{cos}(kx) \cdot dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}^2(kx) \cdot dx} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen}(kx) \cdot dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(kx) \cdot dx} = \frac{-x \frac{\text{cos}(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{cos}(kx)}{k} dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \text{cos}(2kx)}{2} dx} = \frac{-x \frac{\text{cos}(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\text{sen}(kx)}{k^2} \Big|_{-\pi}^{\pi}}{\pi - \frac{\text{sen}(2kx)}{4k} \Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = x$ com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. A Família $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.1**

$$F(x) = x, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

$$B_k = \frac{-\pi \frac{\cos(k\pi)}{k} - \pi \frac{\cos(k\pi)}{k}}{\pi} = \frac{-2 \cos(k\pi)}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$B_k = \frac{-2 \cdot (-1)^k}{k} = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$B_1 = 2, \quad B_2 = -1, \quad B_3 = \frac{2}{3}, \quad B_4 = -\frac{1}{2}, \quad B_5 = \frac{2}{5}, \quad B_6 = -\frac{1}{3}, \quad B_7 = \frac{2}{7}, \dots$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = x$ com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. A Família $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.1**

$$F(x) = x, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

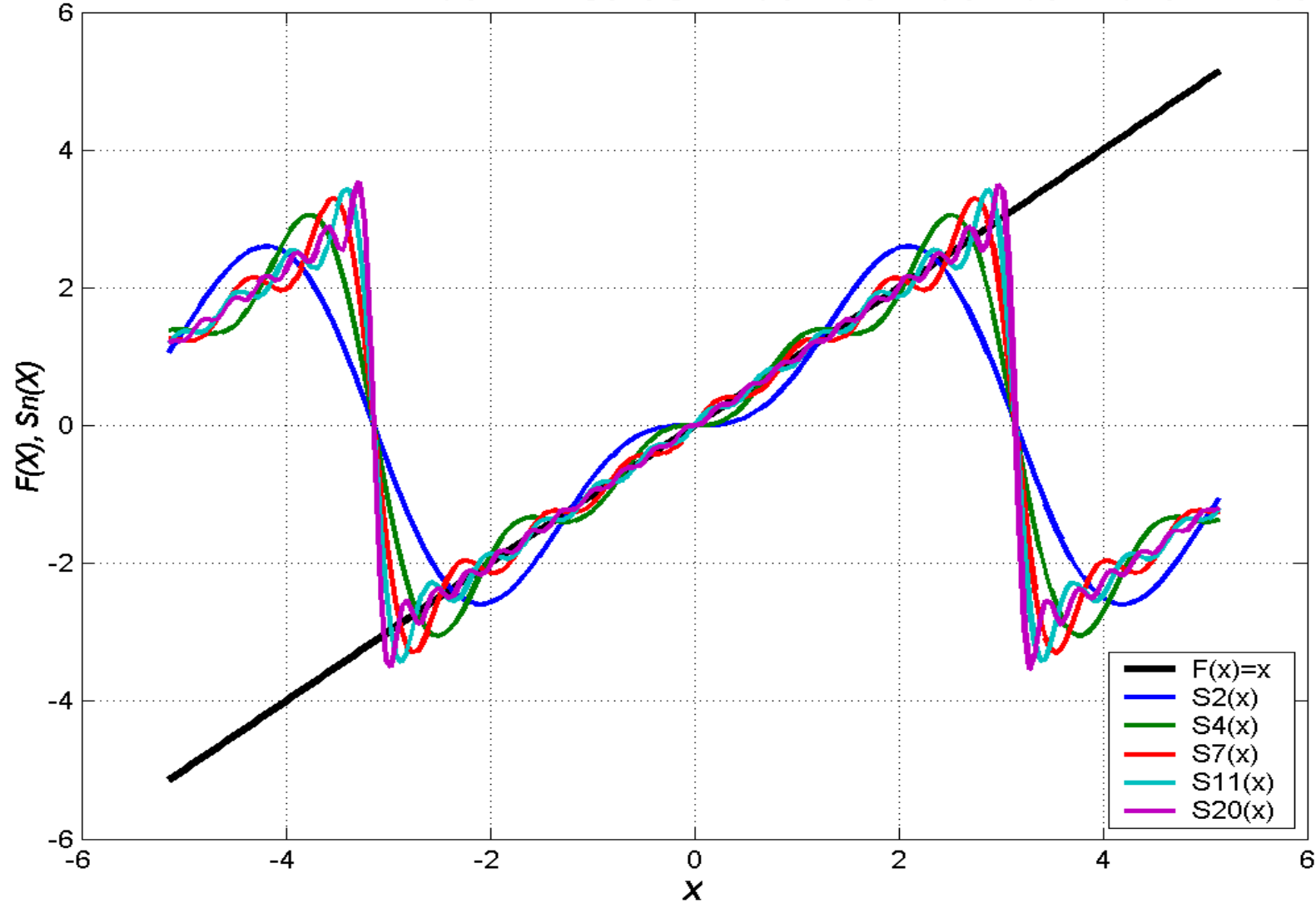
$$B_k = \frac{-2 \cdot (-1)^k}{k} = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{Aproximante S.F. de } O(N) : S_N(x) = \sum_{n=1}^N B_n \text{sen}(nx)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

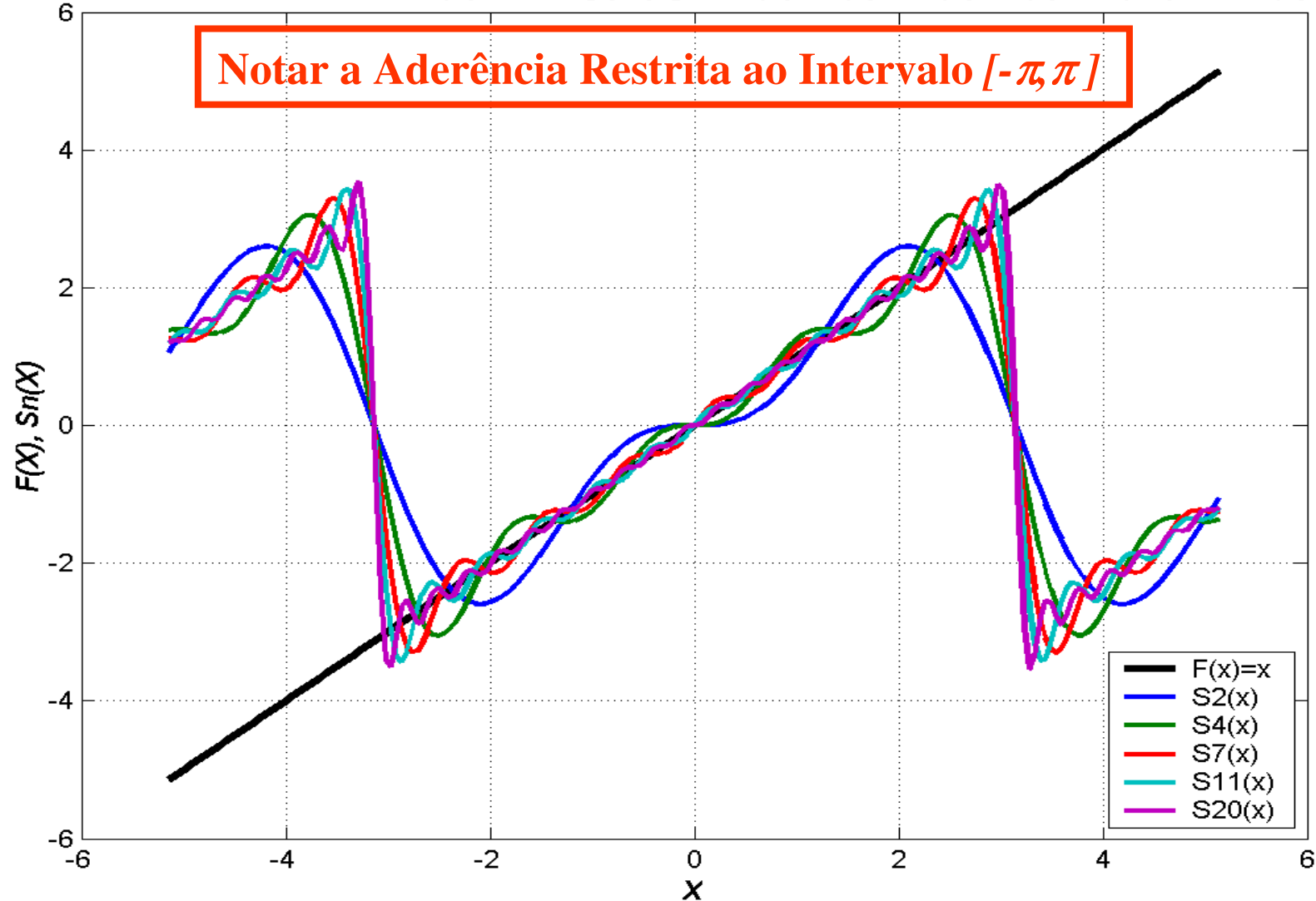
Somas Parciais de Fourier de $F(X)=X$ em $[-\pi, \pi]$: $S_n(X)=B(1)\text{sen}(X)+B(2)\text{sen}(2X)+\dots+B(n)\text{sen}(nx)$



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Somas Parciais de Fourier de $F(X)=X$ em $[-\pi, \pi]$: $S_n(X)=B(1)\text{sen}(X)+B(2)\text{sen}(2X)+\dots+B(n)\text{sen}(nX)$



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = -1$ ($x < 0$), $F(x) = 1$ ($x > 0$) [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.2**

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{cos}(nx)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = -1$ ($x < 0$), $F(x) = 1$ ($x > 0$) [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.2**

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{cos}(nx)$$

$$A_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{cos}(kx) \cdot dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}^2(kx) \cdot dx} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Função Ímpar



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = -1$ ($x < 0$), $F(x) = 1$ ($x > 0$) [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.2**

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Função Ímpar : Só termos Seno na S.F.

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

Aproximante S.F. de $O(N)$: $S_N(x) = \sum_{n=1}^N B_n \text{sen}(nx)$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = -1$ ($x < 0$), $F(x) = 1$ ($x > 0$) [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.2**

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

$$B_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \text{sen}(kx) \cdot dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(kx) \cdot dx} = \frac{\int_{-\pi}^0 -\text{sen}(kx) dx + \int_0^{\pi} \text{sen}(kx) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2kx)}{2} dx} = \frac{\frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi}}{\pi - \frac{\text{sen}(2kx)}{4k} \Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

$$B_k = \frac{\frac{2}{k} - \left(\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{\cos(-k\pi)}{k} \right)}{\pi} = \frac{\frac{2}{k} - \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k} \right)}{\pi}$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = -1$ ($x < 0$), $F(x) = 1$ ($x > 0$) [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{\text{sen}(nx) \ (n=1,2,\dots)\} \cup \{\text{cos}(nx) \ (n=0,1,\dots)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi, \pi]$, com $p(x)=1$ e **Completa**. **Exemplo 4.2**

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

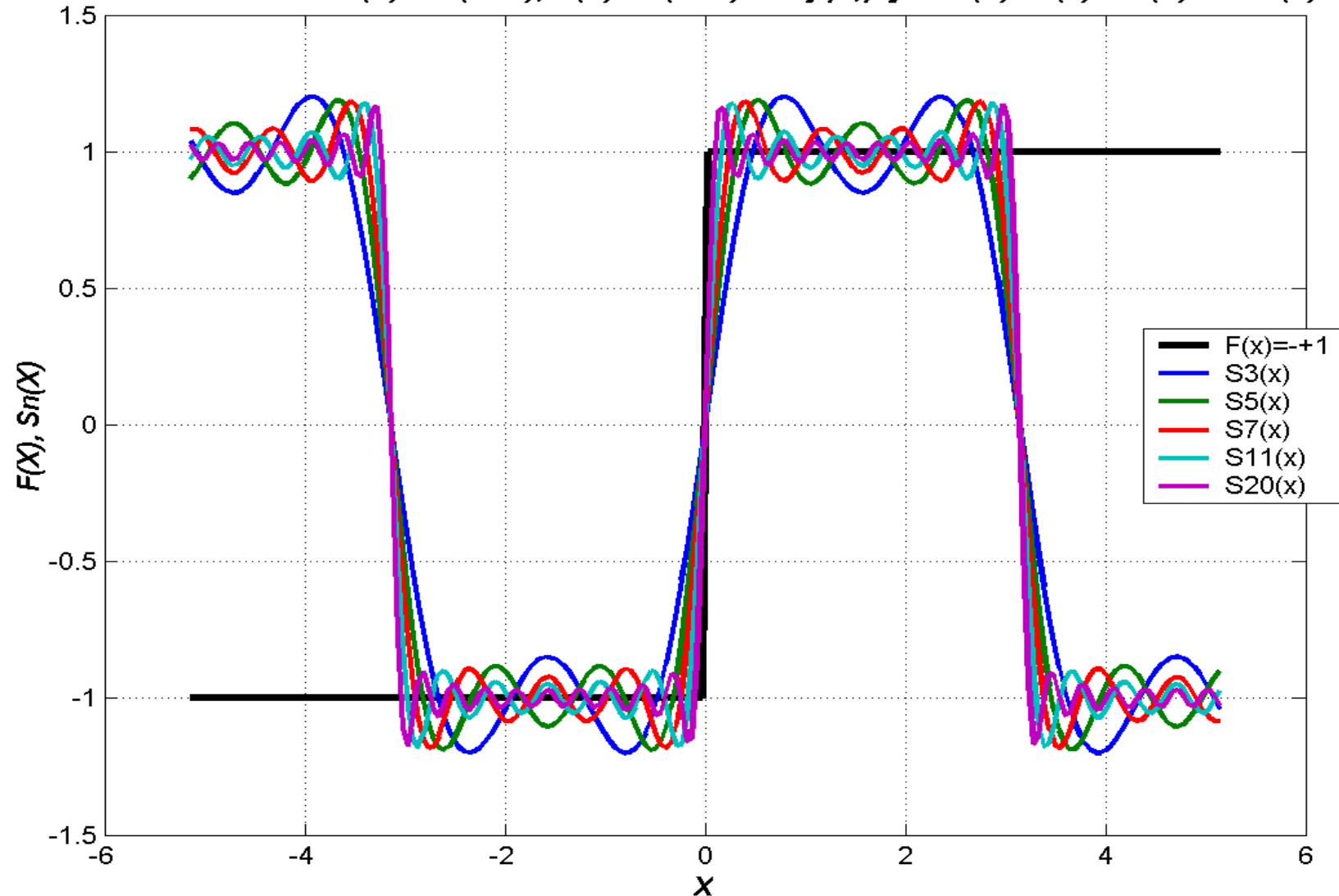
Aproximante S.F. de $O(N)$: $S_N(x) = \sum_{n=1}^N B_n \text{sen}(nx)$

$$B_k = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

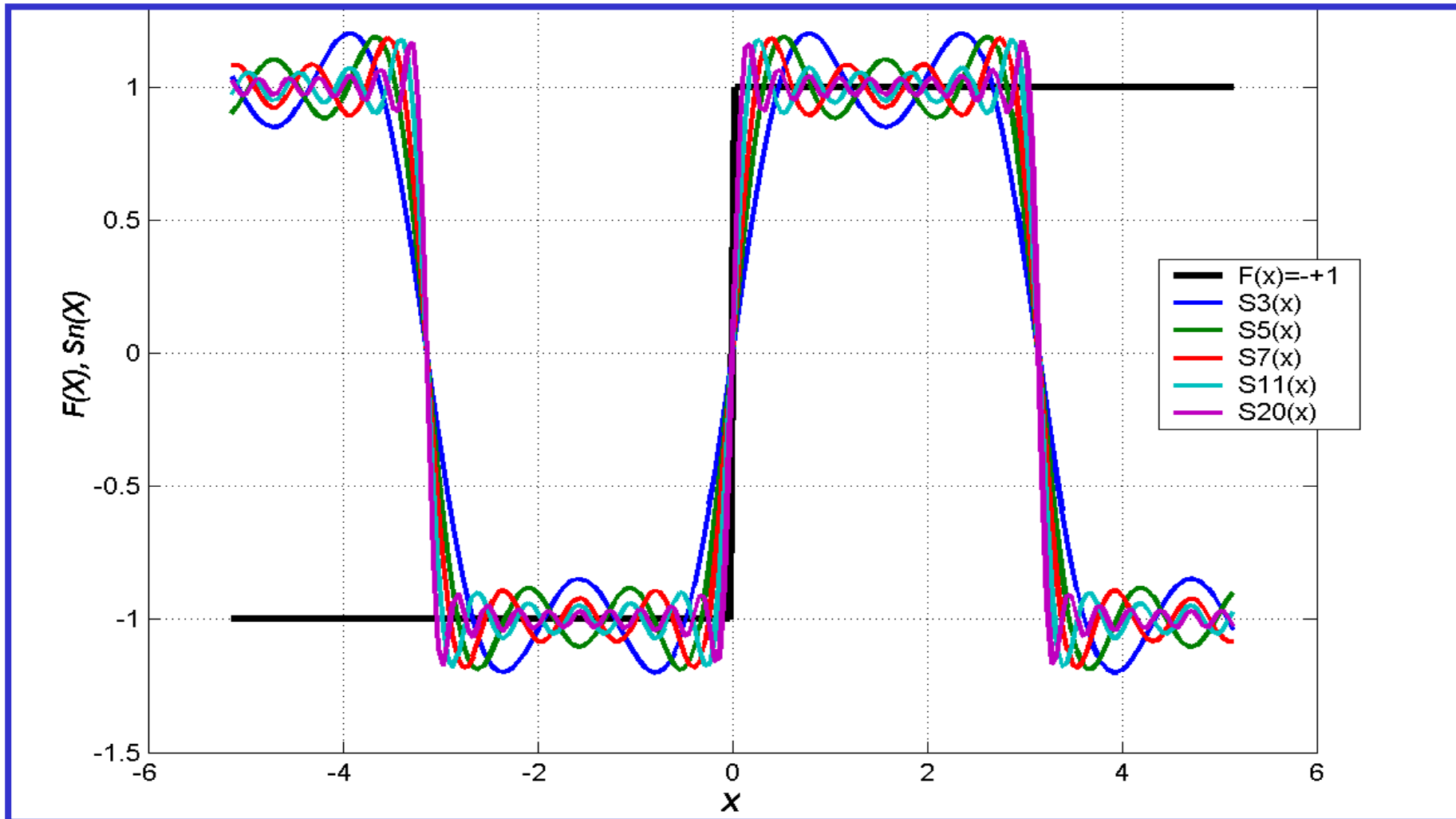
Somas Parc. Fourier de $F(X)=+1(X>0)$, $F(X)=-1(X<0)$ em $[-\pi,\pi]$: $S_n(X)=B(1)\text{sen}(X)+\dots+B(n)\text{sen}(nx)$



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

2. Série de Fourier

Aderência Restrita ao Intervalo $[-\pi, \pi]$



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Este Teorema justifica o surgimento de Família $\{\varphi_n(x)\}$ Ortogonal em $[a,b]$, sob $p(x)$, de EDO-2 Lineares **Teorema 4.5**

Seja a EDO – 2 Linear Homogênea :

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \cdot y^{(1)} \right) + \{q(x) + \lambda \cdot p(x)\} y = 0$$

13

Sob Condições de Contorno Lineares e Homogêneas :

$$a_1 y(a) + a_2 y^{(1)}(a) = 0$$

$$b_1 y(b) + b_2 y^{(1)}(b) = 0$$

14

onde :

a_1, a_2 são constantes não nulas ao mesmo tempo;

b_1, b_2 são constantes não nulas ao mesmo tempo;

$r(x)$ e $p(x)$ são contínuas em $[a,b]$; $q(x)$ é contínua ao menos em (a,b)

λ parâmetro numérico a buscar para viabilizar Solução Não – Trivial

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Este Teorema justifica o surgimento de Família $\{\varphi_n(x)\}$ Ortogonal em $[a,b]$, sob $p(x)$, de EDO-2 Lineares

Teorema 4.5

Sejam as Soluções Não-Triviais de Eq.(13) + (14) : $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$ viabilizadas pelos respectivos valores de λ : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

Então as Soluções Não-Triviais de Eq.(13) + (14), $\{y_n(x)\}$ definem uma Família Ortogonal de Funções em $[a,b]$ sob peso $p(x)$.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Observações

Teorema 4.5

Note que $y(x) = 0$ resolve trivialmente as Eqs. (13) e (14). Mas só queremos soluções não-triviais $y(x) \neq 0$.

Note que (13) é uma EDO-2 Linear e Homogênea; e que as Condições de Contorno (14) também são Equações Lineares, de Coeficientes Constantes, e Homogêneas.

Note que as constantes a_1 e a_2 não podem ser nulas simultaneamente; o mesmo acontecendo com b_1 e b_2 .

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

Sejam Soluções Não-Triviais de Eq.(13) + (14) : $y_n(x) \neq 0$ e $y_m(x) \neq 0$, viabilizadas por respectivos valores diferentes de λ : $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Assim :

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \cdot y_m^{(1)} \right) + q(x) y_m = -\lambda_m p(x) y_m$$

13a

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \cdot y_n^{(1)} \right) + q(x) y_n = -\lambda_n p(x) y_n$$

13b

$$a_1 y_m(a) + a_2 y_m^{(1)}(a) = 0$$

14a

$$a_1 y_n(a) + a_2 y_n^{(1)}(a) = 0$$

14b

$$b_1 y_m(b) + b_2 y_m^{(1)}(b) = 0$$

14c

$$b_1 y_n(b) + b_2 y_n^{(1)}(b) = 0$$

14d

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

Eqs. (14a) e (14b) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 a_1 y_m(a) + a_2 y_m^{(1)}(a) = 0 \\
 a_1 y_n(a) + a_2 y_n^{(1)}(a) = 0
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \begin{bmatrix}
 y_m(a) & y_m^{(1)}(a) \\
 y_n(a) & y_n^{(1)}(a)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad \boxed{15a}$$

Eqs. (14c) e (14d) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 b_1 y_m(b) + b_2 y_m^{(1)}(b) = 0 \\
 b_1 y_n(b) + b_2 y_n^{(1)}(b) = 0
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \begin{bmatrix}
 y_m(b) & y_m^{(1)}(b) \\
 y_n(b) & y_n^{(1)}(b)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad \boxed{15b}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

Multiplicando (13a) por $y_n(x)$, (13b) por $y_m(x)$, e subtraindo – as :

$$y_n \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_m^{(1)}) - y_m \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_n^{(1)}) = (\lambda_n - \lambda_m) p(x) y_n y_m$$

Integrando – se esta igualdade em $\int_a^b (\cdot) dx$:

$$\int_a^b \left(y_n \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_m^{(1)}) - y_m \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_n^{(1)}) \right) dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b p(x) y_n y_m dx$$

Com o método das partes no lado esquerdo:

$$\int_a^b y_n \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_m^{(1)}) dx = r(x) \cdot y_m^{(1)} y_n \Big|_a^b - \int_a^b r(x) \cdot y_m^{(1)} y_n^{(1)} dx$$

$$\int_a^b y_m \frac{d}{dx} (r(x) \cdot y_n^{(1)}) dx = r(x) \cdot y_n^{(1)} y_m \Big|_a^b - \int_a^b r(x) \cdot y_m^{(1)} y_n^{(1)} dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

Obtemos :

$$r(x) \cdot y_m^{(1)} y_n \Big|_a^b - r(x) \cdot y_n^{(1)} y_m \Big|_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b p(x) y_n y_m \cdot dx$$

$$r(b) \left(y_m^{(1)}(b) y_n(b) - y_n^{(1)}(b) y_m(b) \right) +$$

$$- r(a) \left(y_m^{(1)}(a) y_n(a) - y_n^{(1)}(a) y_m(a) \right) = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b p(x) y_n y_m \cdot dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

Neste ponto, usamos os SQHs das Eqs. (15a) e (15b):

$$\begin{bmatrix} y_m(a) & y_m^{(1)}(a) \\ y_n(a) & y_n^{(1)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15a

$$\begin{bmatrix} y_m(b) & y_m^{(1)}(b) \\ y_n(b) & y_n^{(1)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15b

Estes SQHs devem ser satisfeitos por soluções não-triviais que obrigam as respectivas matrizes a serem Singulares (DET = Zero):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow y_m(a)y_n^{(1)}(a) - y_n(a)y_m^{(1)}(a) = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow y_m(b)y_n^{(1)}(b) - y_n(b)y_m^{(1)}(b) = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração

Teorema 4.5

$$r(b)\left(y_m^{(1)}(b)y_n(b) - y_n^{(1)}(b)y_m(b)\right) +$$

$$- r(a)\left(y_m^{(1)}(a)y_n(a) - y_n^{(1)}(a)y_m(a)\right) = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b p(x)y_n y_m \cdot dx$$

Pela Singularidade dos SQHs \Rightarrow
$$\begin{cases} y_m(a)y_n^{(1)}(a) - y_n(a)y_m^{(1)}(a) = 0 \\ y_m(b)y_n^{(1)}(b) - y_n(b)y_m^{(1)}(b) = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b p(x)y_n y_m \cdot dx = 0, \text{ como } \lambda_n \neq \lambda_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_a^b p(x)y_n y_m \cdot dx = 0}$$

Soluções não-triviais de um Problema Sturm-Liouville [PSL]

$y_n(x) \neq 0$ e $y_m(x) \neq 0$, referentes a valores λ distintos, $\lambda_n \neq \lambda_m$, são funções ortogonais em $[a,b]$ com peso $p(x)$.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Portanto, para estabelecer o surgimento de Família $\{\varphi_n(x)\}$ Ortogonal (em $[a,b]$, sob $p(x)$), em um dado Problema de Valor de Contorno (**PVC**) em EDO-2, deve-se estudá-lo cuidadosamente para verificar se ele é um **Problema de Sturm-Liouville [PSL]**. Isto é, para verificar se estamos diante de um *Problema de Valor de Contorno com EDO-2 Linear Homogênea e Condições de Contorno Lineares e Homogêneas*.

Problemas **PSL** darão origem, ao serem resolvidos, a soluções ortogonais $\{\varphi_n(x)\}$. Estas soluções devem ser pesquisadas **atribuindo-se** série de valores adequados ao parâmetro λ conforme garantido pelo **Teorema 4.5**.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Recapitulando a forma de um Problema Sturm-Liouville [*PSL*]

EDO – 2 Linear Homogênea:

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \cdot y^{(1)} \right) + \{ q(x) + \lambda \cdot p(x) \} y = 0$$

13

Condições de Contorno Lineares e Homogêneas:

$$a_1 y(a) + a_2 y^{(1)}(a) = 0$$

$$b_1 y(b) + b_2 y^{(1)}(b) = 0$$

14

onde :

a, b pontos dados para aplicação de Condições de Contorno

a₁, a₂ const., dadas, não nulas ao mesmo tempo;

b₁, b₂ const., dadas, não nulas ao mesmo tempo;

r(x) e p(x) dadas e contínuas em [a,b]; q(x) dada e contínua em (a,b)

λ parâmetro a buscar para viabilizar Solução Não-Trivial

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Exemplo 4.3 : Obter a Solução do Problema de Valor de Contorno abaixo:

$$y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

$$y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Exemplo 4.3

Resolução

#1: Reconhecemos neste *PVC* um *PSL* após colocação na forma:

$$\frac{d}{dx} \left(y^{(1)} \right) + \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(x) = 1 \\ p(x) = 1 \\ q(x) = 0 \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \{a = 0, a_1 = 1, a_2 = 0\}$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \{b = L, b_1 = 1, b_2 = 0\}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#2: Resolvendo PVC para EDO-2 Lin. Hom. com Coef. Const. :

$$y(x) = \exp(\theta \cdot x)$$

Substituindo-se em $y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow$ Eq. Característica : $\theta^2 + \lambda = 0$

Raízes da E.C. : $\theta = \pm\sqrt{-\lambda}$.

A Sol. Completa da EDO-2 Homogênea apresenta 3 casos em λ :

Caso 1 : $\lambda < 0$

Caso 2 : $\lambda = 0$

Caso 3 : $\lambda > 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#3: Caso 1 : $\lambda < 0 \rightarrow 2$ raízes reais distintas $\theta = \pm (-\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \text{Sol. Compl. Hom. } y_H(x) = C_1 \exp(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$\text{CCs para } y_H(x): C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \exp(L\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-L\sqrt{-\lambda}) = 0$$

$$\text{CCs como SQH : } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(L\sqrt{-\lambda}) & \exp(-L\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET}(\underline{\underline{M}}) = \exp(-L\sqrt{-\lambda}) - \exp(L\sqrt{-\lambda}) \neq 0 \text{ para } \lambda < 0 \text{ (} \underline{\underline{M}} \text{ não singular)}$$

$$\text{SQH só admite a Sol. Trivial } \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$$

Caso 1 sem $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#4: Caso 2 : $\lambda = 0 \rightarrow 2$ raízes reais iguais (raiz dupla) $\theta = 0$

$\theta = 0 \Rightarrow$ Sol. Compl. Hom. $y_H(x) = C_1 \exp(0x) + C_2 \cdot x \cdot \exp(0x)$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 + C_2 \cdot x$$

CCs para $y_H(x)$: $C_1 + 0 \cdot C_2 = 0$

$$C_1 + L \cdot C_2 = 0$$

$$\text{CCs como SQH : } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{DET}(\underline{\underline{M}}) = L \neq 0$ ($\underline{\underline{M}}$ não singular)

SQH só admite a Sol. Trivial $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$

Caso 2 sem $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow \text{Sol. Compl. Hom. } y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \text{sen}(x\sqrt{\lambda})$$

$$\text{CCs para } y_H(x): C_1 + 0.C_2 = 0$$

$$C_1 \cos(L\sqrt{\lambda}) + C_2 \text{sen}(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\text{CCs como SQH : } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(L\sqrt{\lambda}) & \text{sen}(L\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET}(\underline{\underline{M}}) = \text{sen}(L\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \text{DET}(\underline{\underline{M}}) = 0 \text{ se } \sqrt{\lambda} = \pm 1 \cdot \frac{\pi}{L}, \pm 2 \cdot \frac{\pi}{L}, \pm 3 \cdot \frac{\pi}{L}, \dots$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n \cdot \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 2^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, \dots \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{SQH tem Sols. Não-Triv.: } \left. \begin{array}{l} C_1 + 0.C_2 = 0 \\ C_1 \cos(\pm n\pi) + C_2 \text{sen}(\pm n\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 \neq 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n \cdot \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 2^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, \dots \quad \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$y_H(x) = C_2 \text{sen}(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 \text{sen}\left(\pm \frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow y_H(x) = C_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Por q?

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n \cdot \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 2^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, \dots \quad \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$y_H(x) = C_2 \text{sen}(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 \text{sen}\left(\pm \frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow y_H(x) = C_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Por q?

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Identifica-se a Família $\{y_n(x)\}$ sem C_2

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#6: Surge, portanto, deste *PVC*, a Família Ortogonal de Soluções :

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\{y_n(x)\} = \left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Família \perp em $[0, L]$ sob peso $p(x) = 1$

$$\begin{cases} \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot dx = 0 & (n \neq m) \\ \int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot dx = \frac{L}{2} & (n = m) \end{cases}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

Exemplo 4.4 : Obter a Solução do Problema de Valor de Contorno abaixo:

$$y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0$$

$$y^{(1)}(0) = 0, \quad y^{(1)}(L) = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

$$y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0$$

$$y^{(1)}(0) = 0, \quad y^{(1)}(L) = 0$$

Exemplo 4.4

Resolução

#1: Reconhecemos neste *PVC* um *PSL* após colocação na forma :

$$\frac{d}{dx} \left(y^{(1)} \right) + \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(x) = 1 \\ p(x) = 1 \\ q(x) = 0 \end{cases}$$

$$y^{(1)}(0) = 0 \quad \Rightarrow \{ a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \}$$

$$y^{(1)}(L) = 0 \quad \Rightarrow \{ b = L, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1 \}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#2: Resolvendo PVC para EDO-2 Lin. Hom. com Coef. Const. :

$$y(x) = \exp(\theta \cdot x)$$

Substituindo-se em $y^{(2)} + \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow$ Eq. Característica : $\theta^2 + \lambda = 0$

Raízes da E.C. : $\theta = \pm\sqrt{-\lambda}$.

A Sol. Completa da EDO-2 Homogênea apresenta 3 casos em λ :

Caso 1 : $\lambda < 0$

Caso 2 : $\lambda = 0$

Caso 3 : $\lambda > 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#3: Caso 1 : $\lambda < 0 \rightarrow 2$ raízes reais distintas $\theta = \pm (-\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \text{Sol. Compl. Hom. } y_H(x) = C_1 \exp(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$\text{CCs para } y_H^{(1)}(x) = C_1\sqrt{-\lambda} \exp(x\sqrt{-\lambda}) - C_2\sqrt{-\lambda} \exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$C_1\sqrt{-\lambda} \exp(L\sqrt{-\lambda}) - C_2\sqrt{-\lambda} \exp(-L\sqrt{-\lambda}) = 0$$

$$\text{CCs como SQH : } \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} \exp(L\sqrt{-\lambda}) & -\sqrt{-\lambda} \exp(-L\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{DET}(\underline{\underline{M}}) = \lambda(\exp(-L\sqrt{-\lambda}) - \exp(L\sqrt{-\lambda})) \neq 0 \text{ para } \lambda < 0$$

$$\text{SQH só admite a Sol. Trivial } \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$$

Caso 1 sem $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#4: Caso 2 : $\lambda = 0 \rightarrow 2$ raízes reais iguais (raiz dupla) $\theta = 0$

$\theta = 0 \Rightarrow$ Sol. Compl. Hom. $y_H(x) = C_1 \exp(0x) + C_2 \cdot x \cdot \exp(0x)$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 + C_2 \cdot x$$

CCs para $y_H^{(1)}(x) = 0 \cdot C_1 + C_2$

$$0 \cdot C_1 + C_2 = 0 \quad (x = 0)$$

$$0 \cdot C_1 + C_2 = 0 \quad (x = L)$$

CCs como SQH : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{DET}(\underline{\underline{M}}) = 0$

SQH admite a Sol. Não-Trivial $C_1 \neq 0, C_2 = 0 \Rightarrow y_H(x) = C_1$

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$$

Caso 2 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$\theta = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow$ Sol. Compl. Hom. $y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \sen(x\sqrt{\lambda})$

CCs para $y_H^{(1)}(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sen(x\sqrt{\lambda}) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})$

$$0.C_1 + C_2\sqrt{\lambda} = 0$$

$$-C_1\sqrt{\lambda}\sen(L\sqrt{\lambda}) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

CCs como SQH :
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sen(L\sqrt{\lambda}) & \cos(L\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$DET(\underline{\underline{M}}) = \sen(L\sqrt{\lambda}) \Rightarrow DET(\underline{\underline{M}}) = 0$ se $\sqrt{\lambda} = \pm 1 \cdot \frac{\pi}{L}, \pm 2 \cdot \frac{\pi}{L}, \pm 3 \cdot \frac{\pi}{L}, \dots$

$\sqrt{\lambda_n} = \pm n \cdot \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 2^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}, \dots \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

SQH tem Sols. Não-Triv. :
$$\left. \begin{array}{l} 0.C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1\sen(\pm n\pi) + C_2\cos(\pm n\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 \neq 0, C_2 = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$$y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos\left(\pm \frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i(\lambda)^{1/2}$

$$y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos\left(\pm \frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Identifica-se a Família $\{y_n(x)\}$ sem C_1

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#6: Reunindo Casos 2 e 3 com Soluções Não-Triviais do *PSL*

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = 1 \quad (n = 0) \\ \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{array} \right\}$$



$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Casos 2 e 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

3. Teorema de Sturm-Liouville

#7: Surge deste *PVC*, a Família Ortogonal de Soluções :

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\{y_n(x)\} = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Família \perp em $[0, L]$ sob peso $p(x) = 1$

$$\begin{cases} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot dx = 0 & (n \neq m) \\ \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot dx = \frac{L}{2} \quad (n = m > 0), \quad \int_0^L 1 \cdot dx = L \quad (n = m = 0) \end{cases}$$