DISCIPLINA

Métodos Matemáticos Aplicados a Processos Químicos e Bioquímicos

Capítulo IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier

José Luiz de Medeiros e Ofélia Q.F. Araújo
Engenharia Química – UFRJ
jlm@eq.ufrj.br, ofelia@eq.ufrj.br
Tel. 21-2562-7535

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

x : *Variável independente*

$\{\phi_n(x)\}$: *Família infinita* $(n = 0,1,2,\ldots)$ *de funções de* x *em* $[a,b]$

$p(x)$: *Função peso da família de funções* $(p(x) \geq 0)$

$[a,b]$: *Intervalo* $(\subset \Re)$ *associado à família de funções* $\{\phi_n(x)\}$

Q.I. : *Sigla para função de Quadrado Integrável*

$\perp$: *Símbolo para família ortogonal de funções* $\{\phi_n(x)\}$

S.F. : *Série de Fourier*

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Função Par e Função Ímpar :

$F(x)\ é\ Par \Rightarrow F(-x) = F(x)$ Ex. $F(x) = x^2,\ F(x) = cos(x)$

$F(x)\ é\ Ímpar \Rightarrow F(-x) = -F(x)$ Ex. $F(x) = x^3,\ F(x) = sen(x)$

$F(x)\ é\ Ímpar\ e\ Contínua \Rightarrow F(0) = 0$

$Demonstração: F(-x) = -F(x);\ Com\ \ x = 0:$

$F(-0) = -F(0) \Rightarrow F(0) = -F(0) \Rightarrow F(0) = 0$

$$F(x)\ é\ Ímpar \Rightarrow \int_{-a}^{a} F(x).dx = 0$$

$$Demonstração: \int_{-a}^{a} F(x).dx = \int_{-a}^{0} F(x).dx + \int_{0}^{a} F(x).dx = \int_{0}^{a} F(x).dx - \int_{0}^{-a} F(x).dx =$$

$$\int_{0}^{a} F(x).dx + \int_{0}^{a} F(-y).dy = \int_{0}^{a} F(x).dx - \int_{0}^{a} F(y).dy = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Função Q.I.

$F(x)$ *é Q.I. em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$ *quando :*

$$\int_a^b p(x).F^2(x)dx \text{ existe; i.e. } \int_a^b p(x).F^2(x)dx < \infty$$

Exemplo 1 : $g(x) = 1/x$ *Não é Q.I. em* $[0,1]$ *sob* $p(x) = 1$ *:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_0^1 = +\infty$$

Exemplo 2 : $g(x) = 1/x$ *é Q.I. em* $[0,1]$ *sob* $p(x) = x^2$ *:*

$$\int_0^1 x^2 \frac{1}{x^2}dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortogonal de Funções

$\{\phi_n(x)\}$ *é Família Ortogonal de Funções Q.I. em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$:

$$\int_a^b p(x).\phi_n(x).\phi_m(x)\,dx = 0 \quad (n \neq m)$$ **1a**

$$\int_a^b p(x).\phi_n^2(x)\,dx = K_n > 0 \quad (n = m)$$ **1b**

$\{\varphi_n(x)\}$ *é* $\perp$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortogonal de Funções Exemplo

$$\{sen(nx)\}\ (n=1,2,\ldots)\ \acute{e}\ \text{Família} \perp \text{de Funções Q.I. em } [-\pi,\pi] \text{ sob } p(x)=1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = 0 \qquad (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)\,dx = K_n > 0 \qquad (n = m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortogonal de Funções — Exemplo

$$\{sen(nx)\}\,(n=1,2,\dots)\ é\ Família \perp de\ Funções\ Q.I.\ em\ [-\pi,\pi]\ sob\ p(x)=1$$

0

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = \left.\frac{sen(nx)cos(mx)}{-m}\right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(nx)cos(mx)}{m/n}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(nx)cos(mx)}{m/n}\,dx$$

0

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = \left.\frac{cos(nx)sen(mx)}{m^2/n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{sen(nx)sen(mx)}{m^2/n^2}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = \frac{0}{1-n^2/m^2} = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\,dx = 0 \quad (n \neq m)}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortogonal de Funções — Exemplo

$$\{sen(nx)\}\,(n = 1,2,\ldots)\ \text{é Família} \perp \text{de Funções Q.I. em } [-\pi,\pi] \text{ sob } p(x) = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-cos(2nx)}{2}dx = \left.\frac{x}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} - \cancelto{0}{\left.\frac{sen(2nx)}{4n}\right|_{-\pi}^{\pi}} = \pi > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx).dx = \pi \qquad (n = m)$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx).dx = \pi > 0 \qquad (n = m)}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortonormal de Funções

$\{\psi_n(x)\}$ *é Família Ortonormal de Funções Q.I. em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$:

$$\int_a^b p(x).\psi_n(x).\psi_m(x)dx = 0 \quad (n \neq m) \tag{2a}$$

$$\int_a^b p(x).\psi_n^2(x)dx = 1 \quad (n = m) \tag{2b}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Converter Família Ortogonal de Funções em Família Ortonormal

$\{\phi_n(x)\}$ *é Família Ortogonal de Funções Q.I. em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$:

$$\int_a^b p(x).\phi_n(x).\phi_m(x)\,dx = 0 \;\; (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x).\phi_n^2(x)\,dx = K_n > 0 \;\; (n = m)$$

$$\boxed{Definindo-se\;\; \psi_n(x) = \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{K_n}}}$$

Teremos $\{\psi_n(x)\}$ *tal que :*

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Converter Família Ortogonal de Funções em Família Ortonormal

$$\int_a^b p(x).\psi_n(x).\psi_m(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{K_n K_m}}\int_a^b p(x).\phi_n(x).\phi_m(x)\,dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x).\psi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{K_n}\int_a^b p(x).\phi_n^2(x)\,dx = \frac{K_n}{K_n} = 1$$

$\{\psi_n(x)\}$ é Ortonormal

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
1. Definições

Família Ortonormal de Funções — Exemplo

$$\{sen(nx)\}\ (n=1,2,\ldots)\ \text{é Família} \perp \text{de Funções Q.I. em } [-\pi,\pi]\ \text{sob } p(x)=1$$

$$\boxed{Definindo-se\ \psi_n(x)=\frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}}}$$

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)\,dx = K_n = \pi\right.$$

$$\left\{\frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}\ \text{é Família Ortonormal de Funções Q.I. em } [-\pi,\pi],\ sob\ p(x)=1$$

pois

$$\int_a^b p(x)\psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b sen(nx).sen(mx)\,dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x).\psi_n^2(x)\,dx \qquad = \frac{1}{\pi}\int_a^b sen^2(nx)\,dx = 1$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

#1: Considere *F(x)* Q.I. em *[a,b]* sob *p(x)*

$F(x)\ Q.I.\ em\ [a,b]\ sob\ p(x):$

$$\int_a^b p(x).F^2(x)dx < \infty$$

#2: Considere a Família Ortogonal *{φₙ(x)}* em *[a,b]* sob *p(x)*

$\{\phi_n(x)\}\ é\ Família\ \perp\ de\ Funções\ Q.I.\ em\ [a,b]\ sob\ p(x):$

$$\int_a^b p(x).\phi_n(x).\phi_m(x)dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_a^b p(x).\phi_n^2(x)dx = K_n > 0 \qquad (n = m)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

#3: Considere a Série Infinita *E(x)* construída com *{$\varphi_n(x)$}*

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \qquad \boxed{3}$$

Note que a Série de *E(x) poderá* não convergir para certos *x* ou mesmo para nenhum *x* . *Naturalmente, admitimos o contrário ...*

#4: Considere o Resíduo de *E(x)* com respeito a *F(x)*

$$\Im(x) = F(x) - E(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

#5: Considere a Medida da falta de aderência de *E(x)* a *F(x)* :

$$\Xi = \int_a^b p(x).\Im^2(x).dx > 0 \qquad \boxed{4}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

#6: Calculamos este Funcional de Falta de Aderência a *F(x)*

$$\Xi = \int_a^a p(x)\left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx \qquad \boxed{5}$$

$$\Xi = \int_a^a p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_a^b p(x)\phi_n(x)\phi_m(x).dx$$

#7: Devido à Ortogonalidade da Família :

$$\Xi = \int_a^a p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

#8: Obtemos coeficientes $\{ A_n \}$ para maximizar aderência da S.F.

$$\underset{\{A_n\}}{Min}\ \Im(x)\ na\ m\acute{e}dia \Rightarrow \underset{\{A_n\}}{Min}\ \Xi \Rightarrow \underset{\{A_n\}}{Pto.\ Est.\ de}\ \Xi$$

$$\boxed{\underset{\{A_n\}}{P.E.}\ \Xi \Leftrightarrow \frac{\partial \Xi}{\partial A_k} = 0\ \ (k = 1,2,\ldots)}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

#8: Obtemos coeficientes $\{A_n\}$ para maximizar aderência da S.F.

$$\boxed{\frac{\partial \Xi}{\partial A_k} = 0 \;\; (k = 1,2,\ldots)}$$

$$\Xi = \int_a^a p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial A_k} = 0 \Leftrightarrow \;\; -2\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx \;\; + 2A_k \int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx = 0$$

$$\boxed{A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx} \qquad (k = 1,2,\ldots)}$$

Coeficientes de Fourier

6

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Série de Fourier de $F(x)$ em $\{\varphi_n(x)\}$ **Resumo**

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \quad \boxed{3}$$

Coeficientes $\{A_n\}$ na Expansão de $F(x)$ em $\{\varphi_n(x)\}$ obtidos de modo a Minimizar o Funcional :

$$\Xi = \int_a^a p(x)\left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx \quad \boxed{4}$$

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x) F(x) \phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x) \phi_k^2(x).dx} \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

Coeficientes de Fourier

$\boxed{6}$

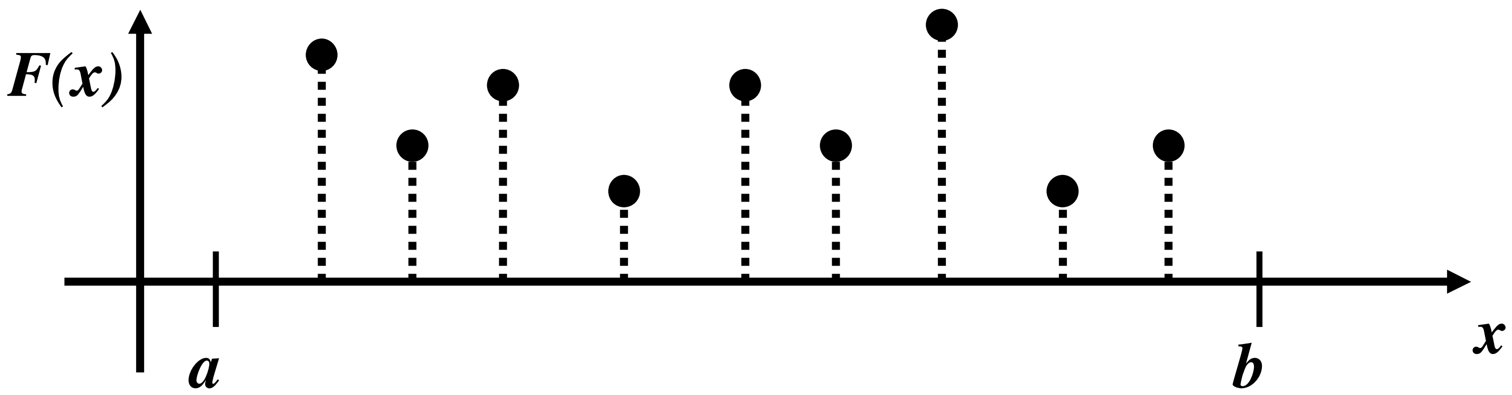
Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Função Nula

$F(x)$ é Função Nula em $[a,b]$ sob $p(x)$, quando :

$$\int_a^b p(x).F^2(x)\,dx = 0 \qquad \boxed{7}$$

Note que $F(x) = 0$ é Função Nula; mas não necessariamente $F(x)$ deve ser *identicamente nula* para ser Função Nula. A função seguinte é uma Função Nula em $[a,b]$ sob $p(x)$ e não é identicamente nula:



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Função Nula

$$F(x)\ \textit{Função Nula em}\ [a,b]\ \textit{sob}\ p(x) \Rightarrow \int_a^b p(x).F^2(x)\,dx = 0$$

Observamos também que qualquer função multiplicada por uma Função Nula é também uma Função Nula. Sendo *F(x)* Função Nula:

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,...) \qquad \boxed{8}$$

$$\{\ \phi_n(x)\ \}\ \textit{Família} \perp \textit{em}\ [a,b]\ \textit{sob}\ p(x).$$

Isto é, a Função Nula é Ortogonal a Todos os Membros de uma Família Ortogonal de Funções.

Naturalmente cabe perguntar se a relação (8) valeria também para funções *F(x)* que não fossem Funções Nulas. Isto é, se haveria *F(x)* Ortogonal a toda uma Família Ortogonal de Funções, onde *F(x)* não é uma Função Nula.

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

$$\{\ \phi_n(x)\ \}\ Família \perp em\ [a,b]\ sob\ \ p(x).$$

Neste caso, todos os coeficientes A_n da S.F. de *F(x)* valem Zero :

$$\Rightarrow A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots)$$

A Família *{ cos(nx) }* *(n=0,1,2,...)* é Ortogonal em *[-π,π]* com *p(x)=1*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx).\cos(mx).dx = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx).dx > 0$$

Mas os coeficientes de Fourier da função *F(x) = x* nesta Família são todos Nulos, embora esta função Não seja uma Função Nula :

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x.\cos(kx).dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx).dx} = 0 \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

Por que ?

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Como visto, Não Basta a Ortogonalidade da Família $\{\varphi_n(x)\}$ **para garantir que qualquer função Q.I. tenha expansão em S.F. sobre os membros da Família.**

O que é Necessário é que a Família, além de Ortogonal, seja Completa de acordo com a seguinte definição :

A Família de Funções Ortogonais $\{\phi_n(x)\}$ *em* $[a,b]$ *sob peso* $p(x)$, *é dita ser Completa se a Relação Seguinte Valer apenas para* $F(x)$ *Função Nula :*

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Como visto, Não Basta a Ortogonalidade da Família $\{\varphi_n(x)\}$ para garantir que qualquer função Q.I. possa tenha expansão em S.F. sobre os membros da Família.

O que é Necessário é que a Família, além de Ortogonal, seja Completa de acordo com a seguinte definição :

A Família de Funções Ortogonais $\{\phi_n(x)\}$ *em* $[a,b]$ *sob peso* $p(x)$, *é dita ser Completa se a Relação Seguinte Valer apenas para* $F(x)$ *Função Nula :*

$$\int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

i.e. para Todos os Membros da Família !

Teorema 4.1

$$Seja\ a\ Expansão\ E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)\ da\ Função\ F(x)\ Q.I.$$

$$em\ termos\ da\ Família\ COMPLETA\ de\ Funções\ Ortogonais\ \{\phi_n(x)\}$$

$$em\ [a,b]\ sob\ peso\ p(x).$$

$$Seja\ a\ Série\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)\ Convergente,\ podendo\ ser\ Integrada$$

$$Termo\ a\ Termo.$$

$$Então\ a\ Soma\ da\ Série\ E(x)\ Difere\ de\ F(x)\ no\ Máximo$$

$$por\ uma\ Função\ Nula.$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Teorema 4.1 **Demonstração**

Seja o Resíduo da S.F.

$$\Im(x) = F(x) - E(x)$$

$$\Im(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

Para demonstrar o Teorema devemos mostrar que $\Im(x)$ *é uma Função Nula; i.e. que* $\Im(x)$ *é* $\perp$ *a todos os membros de* $\{\phi_n(x)\}$.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Teorema 4.1 **Demonstração**

$$Multiplicando\ \Im(x)\ por\ p(x).\phi_k(x)\ e\ integrando\ \int_a^b (.)dx:$$

$$\int_a^b p(x)\Im(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x)\phi_n(x)\phi_k(x)dx$$

Usando a Ortogonalidade da Família :

$$\int_a^b p(x)\Im(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - A_k \int_a^b p(x)\phi_k(x)\phi_k(x)dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Teorema 4.1 **Demonstração**

$$\int_a^b p(x)\Im(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - A_k\int_a^b p(x)\phi_k(x)\phi_k(x)dx$$

Com os Coeficientes de Fourier :

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_k^2(x).dx} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots)$$

$$\int_a^b p(x)\Im(x)\phi_k(x)dx = \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx - \int_a^b p(x)F(x)\phi_k(x)dx = 0$$

$$(k = 1,2,\ldots)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Teorema 4.1 **Demonstração**

$$\int_a^b p(x)\Im(x)\phi_k(x)dx = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots) \Rightarrow \Im(x) \textit{ é Função Nula}$$

$Portanto$

$$F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\phi_n(x) \equiv \textit{Função Nula ou Identicamente Nula}$$

Requisitos :
(1) *F(x)* Q.I. em *[a,b]* sob *p(x)*
(2) { $\varphi_n(x)$ } Ortogonal em *[a,b]* sob *p(x)* e Completa
(3) S.F. Converge e Integrável Termo a Termo

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Definição 4.1 : A Sequência de Funções *$S_n(x)$* é dita convergir na média para *$F(x)$* , Q.I. em *[a,b]* sob *$p(x)$*, se :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\left(F(x)-S_n(x)\right)^2 dx = 0 \qquad \mathbf{9}$$

Definição 4.2 : Se *$S_n(x)$* é a *n-ésima* Soma Parcial da S.F. de *$F(x)$*, *qualquer* Q.I. em *[a,b]* sob *$p(x)$*, em termos da Família Ortogonal *$\{\varphi_n(x)\}$*, em *[a,b]* sob *$p(x)$* :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \phi_k(x) \qquad \mathbf{10}$$

e *$S_n(x)$* Converge na Média para *$F(x)$*, então *$\{\varphi_n(x)\}$* é *Fechado.*

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

A Igualdade de Parseval para Família Ortogonal Fechada.
Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, Fechada;
Seja $F(x)$ Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$; Então vale a Igualdade de Parseval abaixo: Teorema 4.2

$$\boxed{\int_a^b p(x)F^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx} \qquad \mathbf{11}$$

$$Com\ Família\ Ortonormal\ \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx = 1,\ tem-se\ a\ I.P.\ clássica:$$

$$\boxed{\int_a^b p(x)F^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \qquad \mathbf{12}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Demonstração : **Teorema 4.2**

$\{\phi_n(x)\}$ *é* $\perp$ *em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$. $\{\phi_n(x)\}$ *também é Fechada.*

Seja o Aproximante S.F. de $F(x)$ *de Ordem* N : $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n \phi_n(x)$

Como $\{\phi_n(x)\}$ *é Fechada* :

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b p(x)\big(F(x) - S_N(x)\big)^2 dx = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b p(x)\left(F(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n \phi_n(x)\right)^2 dx = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Demonstração : **Teorema 4.2**

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b p(x)\left(F(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n \phi_n(x) \right)^2 dx = 0$$

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b p(x) F^2(x) dx - 2\sum_{n=1}^{N} A_n \int_a^b p(x) F(x) \phi_n(x) dx \\ \displaystyle\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} A_k A_n \int_a^b p(x) \phi_k(x) \phi_n(x) dx \end{array} \right\}$$

Demonstração : **Teorema 4.2**

Devido à Ortogonalidade da Família, a relação torna-se:

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \int_a^b p(x)F^2(x)dx - 2\sum_{n=1}^{N} A_n \int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x)dx + \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx \right\}$$

Com os Coeficientes de Fourier: $A_n = \dfrac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx}$

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \int_a^b p(x)F^2(x)dx - 2\sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx + \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx \right\}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Demonstração : **Teorema 4.2**

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \int_a^b p(x) F^2(x) dx - 2 \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx + \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx \right\}$$

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \int_a^b p(x) F^2(x) dx - \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx \right\}$$

$$0 = \int_a^b p(x) F^2(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx$$

$$\boxed{\int_a^b p(x) F^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x) \phi_n^2(x) dx} \qquad (11)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Demonstração : **Teorema 4.2**

$$\int_a^b p(x)F^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx \qquad \mathbf{11}$$

$Se,\ adicionalmente,\ a\ Família\ é\ Ortonormal : \int_a^b p(x)\phi_n^2(x)dx = 1,$

$tem-se\ a\ forma\ clássica\ da\ Igualdade\ de\ Parseval :$

$$\int_a^b p(x).F^2(x).dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \qquad \mathbf{12}$$

Observação : Teorema 4.2

A Igualdade de Parseval também poderia ser mostrada para $\{\phi_n(x)\} \perp$ *em* $[a,b]$ *sob* $p(x)$ *e COMPLETA.*

Sendo $\{\phi_n(x)\}$ *Completa,* $\Im(x) = F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\phi_n$ *é Função Nula.*

Pela definição de Função Nula : $\int_a^b p(x)\left(F(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\phi_n(x)\right)^2 dx = 0$

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x).F(x)\phi_n(x).dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_a^b p(x)\phi_n(x).\phi_m(x).dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Demonstração : **Teorema 4.2**

Pela Ortogonalidade :

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b p(x).F(x).\phi_n(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

Com os Coeficientes de Fourier : $A_n = \dfrac{\int_a^b p(x)F(x)\phi_n(x).dx}{\int_a^b p(x)\phi_n^2(x).dx}$

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

Demonstração : **Teorema 4.2**

$$0 = \int_a^b p(x).F^2(x).dx - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx$$

$$\boxed{\int_a^b p(x).F^2(x).dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b p(x).\phi_n^2(x).dx} \quad \boxed{11}$$

$$Com\ \ Família\ \ Ortonormal\ \int_a^b p(x)\phi_k^2(x)dx = 1,\ tem - se\ \ a\ \ I.P.\ Clássica$$

$$\boxed{\int_a^b p(x).F^2(x).dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad \boxed{12}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, Completa;
Então $\{\varphi_n(x)\}$ é também Fechado com respeito ao espaço de funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$ Teorema 4.3

Seja $\{\varphi_n(x)\}$, Família Ortogonal em $[a,b]$ sob $p(x)$, Fechada com respeito ao espaço de funções Q.I. em $[a,b]$ sob $p(x)$.
Então $\{\varphi_n(x)\}$ é também Completa. Teorema 4.4

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Construir a S.F. de $F(x) = x$ com $\{\varphi_n(x)\} = \{sen(nx)\ \ (n=1,2,\ldots)\}$ U $\{cos(nx)\ \ (n=0,1,\ldots)\}$. A Família $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em $[-\pi,\pi]$, com $p(x)=1$ e Completa. **Exemplo 4.1**

$$Escrevemos\ \ F(x) = x,\ E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx)$$

$$A_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x.\cos(kx).dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx).dx} = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$B_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x.sen(kx).dx}{\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(kx).dx} = \frac{-x\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2kx)}{2}dx} = \frac{-x\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \overbrace{\left.\frac{sen(kx)}{k^2}\right|_{-\pi}^{\pi}}^{0}}{\pi - \underbrace{\left.\frac{sen(2kx)}{4k}\right|_{-\pi}^{\pi}}_{0}}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Construir a S.F. de *F(x) = x* com *{$\varphi_n(x)$} = {sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. A Família *{$\varphi_n(x)$}* é Ortogonal em *[-π,π]*, com *p(x)=1* e Completa. **Exemplo 4.1**

$$F(x) = x,\ E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx)$$

$$B_k = \frac{-\pi\dfrac{\cos(k\pi)}{k} - \pi\dfrac{\cos(k\pi)}{k}}{\pi} = \frac{-2\cos(k\pi)}{k} \quad (k = 1,2,\ldots)$$

$$\boxed{B_k = \frac{-2.(-1)^k}{k} = \frac{2.(-1)^{k+1}}{k} \quad (k = 1,2,\ldots)}$$

$$B_1 = 2,\quad B_2 = -1,\quad B_3 = \frac{2}{3},\quad B_4 = -\frac{1}{2},\quad B_5 = \frac{2}{5},\quad B_6 = -\frac{1}{3},\quad B_7 = \frac{2}{7},\ \ldots$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

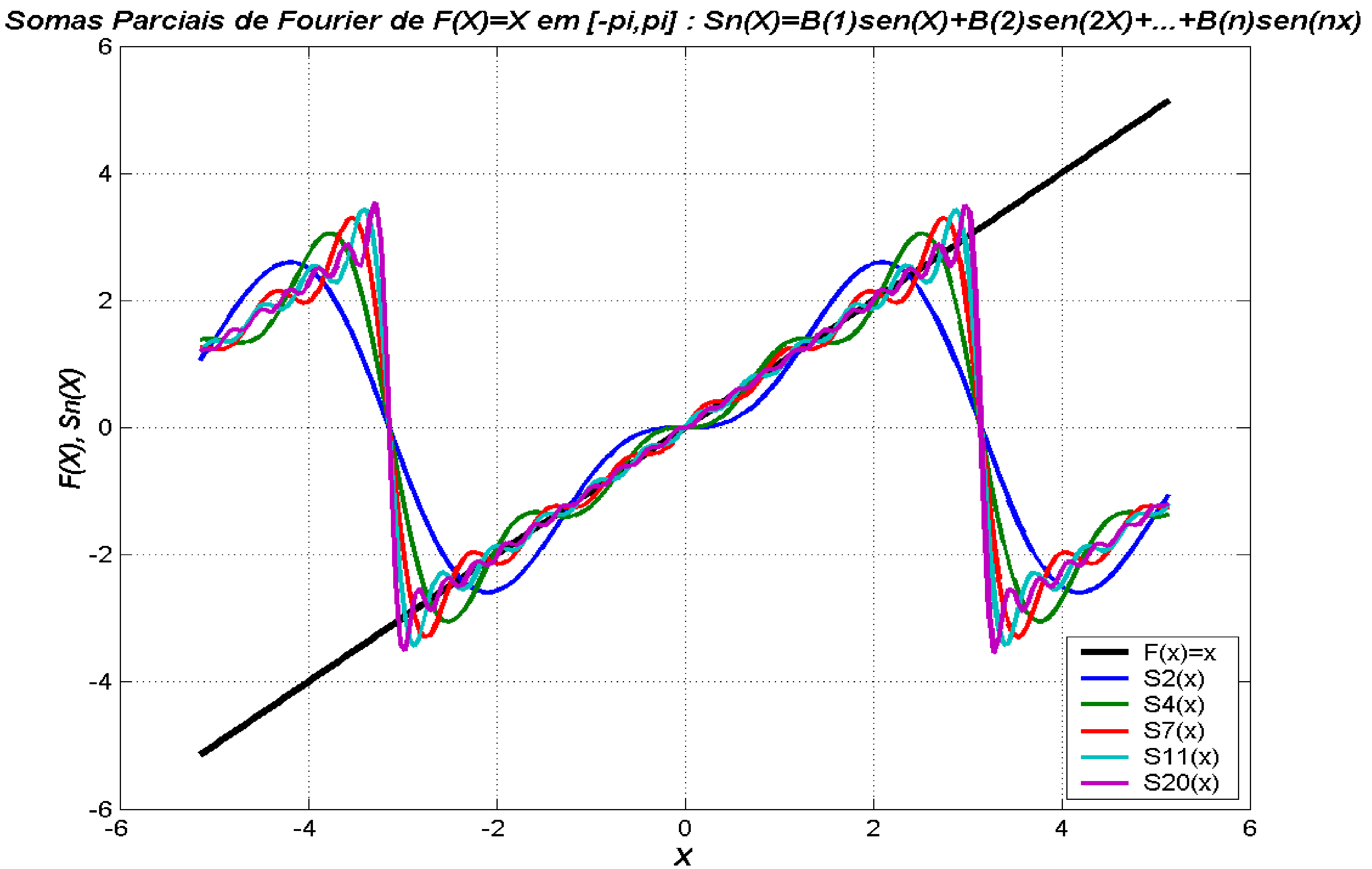
Construir a S.F. de *F(x) = x* com *{$\varphi_n(x)$} = {sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. A Família *{$\varphi_n(x)$}* é Ortogonal em *[-π, π]*, com *p(x)=1* e Completa. **Exemplo 4.1**

$$F(x) = x,\ E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx)$$

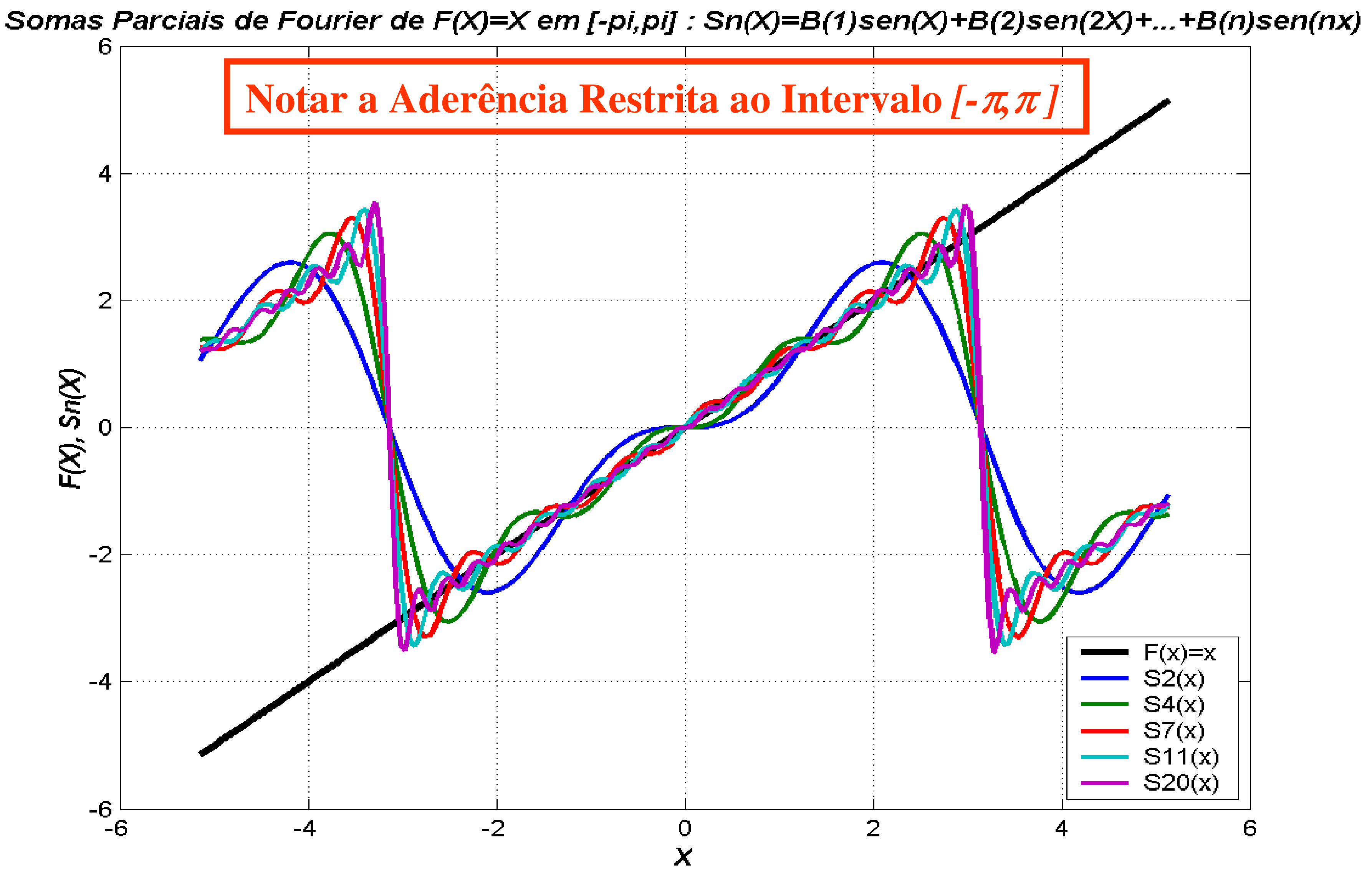
$$\boxed{B_k = \frac{-2.(-1)^k}{k} = \frac{2.(-1)^{k+1}}{k} \quad (k = 1,2,\ldots)}$$

$$Aproximante\ S.F.\ de\ O(N) : S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(nx)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Construir a S.F. de *F(x) = -1 (x<0), F(x)=1 (x>0)* *[Não-Contínua]* com $\{\varphi_n(x)\}$ = *{sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em *[-π,π]*, com *p(x)=1* e Completa. Exemplo 4.2

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx)$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Construir a S.F. de *F(x) = -1 (x<0), F(x)=1 (x>0)* *[Não-Contínua]* com *{$\varphi_n(x)$} = {sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. *{$\varphi_n(x)$}* é Ortogonal em *[-π,π]*, com *p(x)=1* e Completa. Exemplo 4.2

Função Ímpar

$$F(x)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sen(nx)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(nx)$$

$$A_k=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}x.\cos(kx).dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx).dx}=0\quad(k=0,1,2,...)$$

Construir a S.F. de *F(x) = -1 (x<0), F(x)=1 (x>0)* *[Não-Contínua]* com *{φ_n(x)} = {sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. *{φ_n(x)}* é Ortogonal em *[-π,π]*, com *p(x)=1* e Completa. Exemplo 4.2

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Função Ímpar : Só termos Seno na S.F.

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx)$$

$$Aproximante\ S.F.\ de\ O(N) : S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(nx)$$

Construir a S.F. de *F(x) = -1 (x<0), F(x)=1 (x>0)* [Não-Contínua] com *{$\varphi_n(x)$} = {sen(nx) (n=1,2,...)} U {cos(nx) (n=0,1,...)}*. *{$\varphi_n(x)$}* é Ortogonal em *[-π, π]*, com *p(x)=1* e Completa. Exemplo 4.2

$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad , \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx)$$

$$B_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} F(x) sen(kx).dx}{\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(kx).dx} = \frac{\int_{-\pi}^{0} - sen(kx)dx + \int_{0}^{\pi} sen(kx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2kx)}{2} dx} = \frac{\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{0}^{\pi}}{\pi - \left.\frac{sen(2kx)}{4k}\right|_{-\pi}^{\pi}}$$

$$B_k = \frac{\frac{2}{k} - \left(\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{\cos(-k\pi)}{k}\right)}{\pi} = \frac{\frac{2}{k} - \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k}\right)}{\pi}$$

$$\boxed{B_k = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Construir a S.F. de *F(x) = -1 (x<0), F(x)=1 (x>0)* [*Não-Contínua*] com $\{\varphi_n(x)\} = \{sen(nx)\ \ (n=1,2,...)\}\ U\ \{cos(nx)\ \ (n=0,1,...)\}$. $\{\varphi_n(x)\}$ é Ortogonal em *[-π, π]*, com *p(x)=1* e Completa. Exemplo 4.2

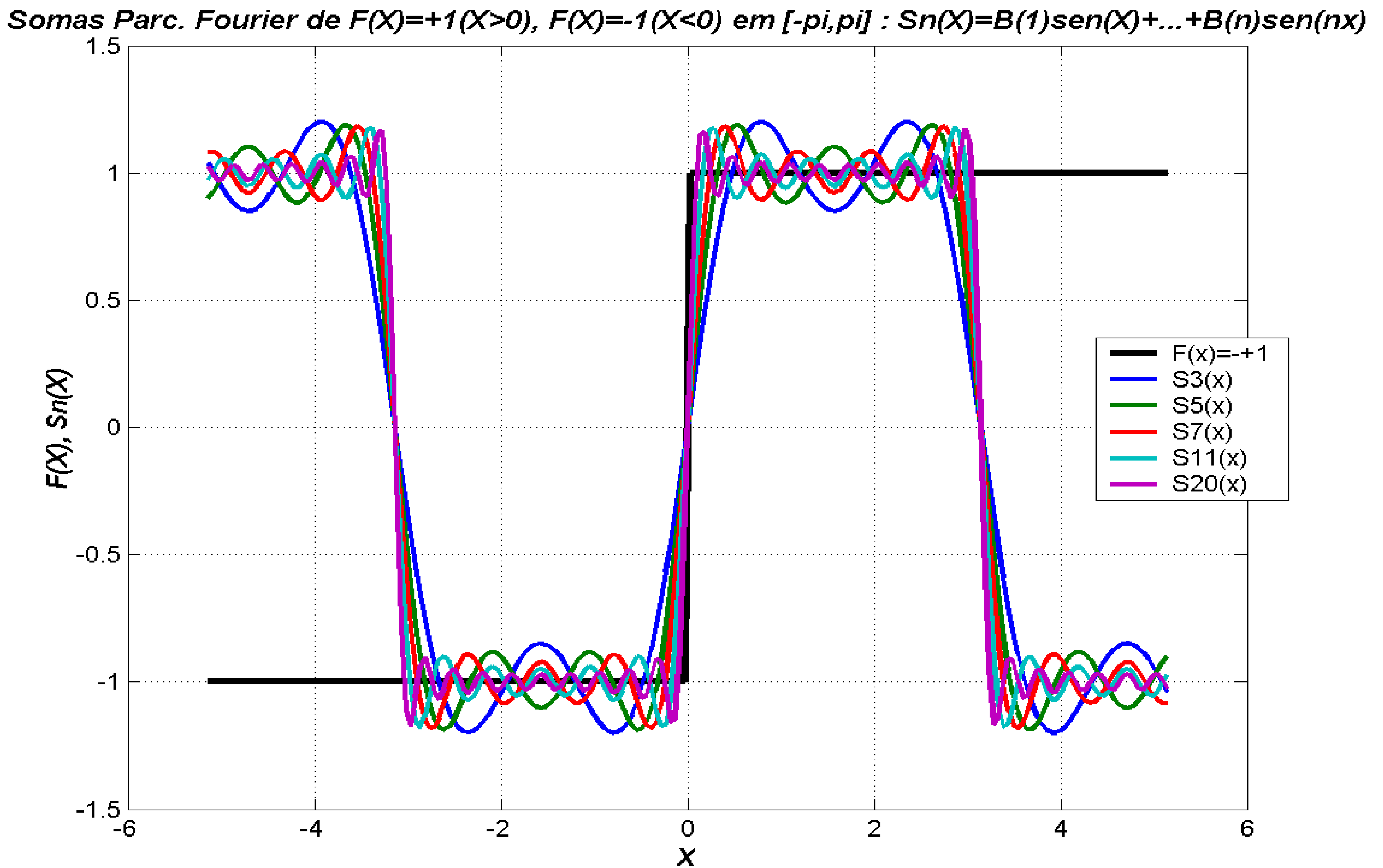
$$F(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(nx)$$

$$Aproximante\ S.F.\ de\ O(N) : S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(nx)$$

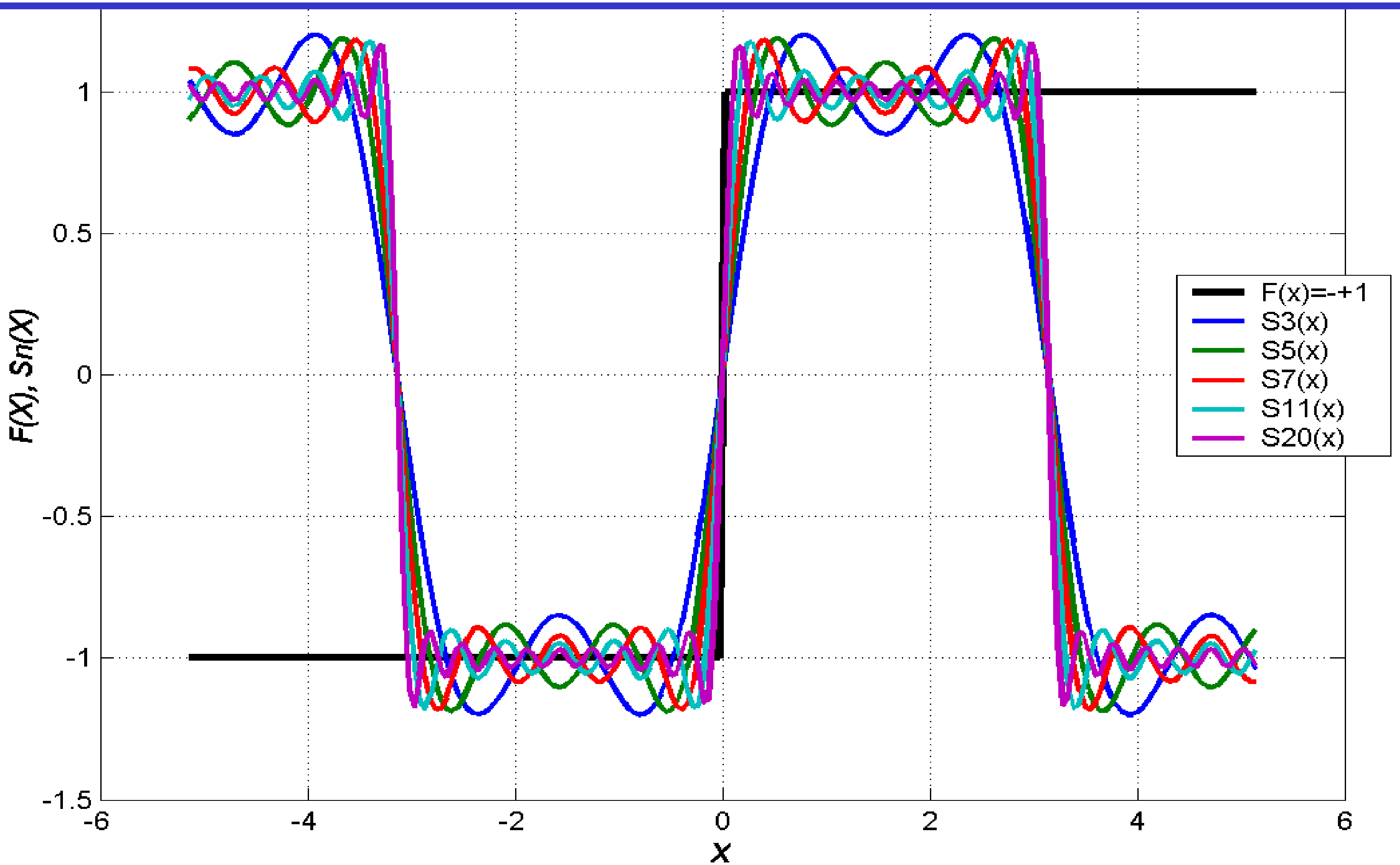
$$\boxed{B_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
2. Série de Fourier

Aderência Restrita ao Intervalo *[-π, π]*



Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Este Teorema justifica o surgimento de Família *{$\varphi_n(x)$}* Ortogonal em *[a,b]*, sob *p(x)*, de EDO-2 Lineares **Teorema 4.5**

Seja a EDO−2 Linear Homogênea:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x).y^{(1)}\right)+\left\{q(x)+\lambda.p(x)\right\}y=0 \qquad \boxed{13}$$

Sob Condições de Contorno Lineares e Homogêneas:

$$a_1 y(a)+a_2 y^{(1)}(a)=0$$
$$b_1 y(b)+b_2 y^{(1)}(b)=0 \qquad \boxed{14}$$

onde:

a_1, a_2 *são constantes não nulas ao mesmo tempo;*

b_1, b_2 *são constantes não nulas ao mesmo tempo;*

$r(x)$ *e* $p(x)$ *são contínuas em* $[a,b]$; $q(x)$ *é contínua ao menos em* (a,b)

λ *parâmetro numérico a buscar para viabilizar Solução Não−Trivial*

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Este Teorema justifica o surgimento de Família *{$\varphi_n(x)$}* Ortogonal em *[a,b]*, sob *p(x)*, de EDO-2 Lineares **Teorema 4.5**

$$Sejam\ as\ Soluções\ Não-Triviais\ de\ Eq.(13)+(14):\ y_1(x), y_2(x), y_3(x),...$$
$$viabilizadas\ \ pelos\ respectivos\ valores\ de\ \lambda\qquad :\ \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,...$$

$$Então\ as\ Soluções\ Não-Triviais\ de\ Eq.(13)+(14),\ \{y_n(x)\}\ \ definem$$
$$uma\ \ Família\ \ Ortogonal\ \ de\ \ Funções\ em\ [a,b]\ sob\ \ peso\ \ p(x).$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Observações **Teorema 4.5**

Note que $y(x) = 0$ resolve trivialmente as Eqs. (13) e (14). Mas só queremos soluções não-triviais $y(x) \neq 0$.

Note que (13) é uma EDO-2 Linear e Homogênea; e que as Condições de Contorno (14) também são Equações Lineares, de Coeficientes Constantes, e Homogêneas.

Note que as constantes a_1 e a_2 não podem ser nulas simultaneamente; o mesmo acontecendo com b_1 e b_2.

Demonstração **Teorema 4.5**

Sejam Soluções Não−Triviais de Eq.(13)+(14) : $y_n(x) \neq 0$ *e* $y_m(x) \neq 0$, *viabilizadas por respectivos valores diferentes de* λ: $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Assim:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x).y_m^{(1)}\right) + q(x)y_m = -\lambda_m p(x)y_m \quad \textbf{13a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(r(x).y_n^{(1)}\right) + q(x)y_n = -\lambda_n p(x)y_n \quad \textbf{13b}$$

$$a_1 y_m(a) + a_2 y_m^{(1)}(a) = 0 \quad \textbf{14a}$$

$$a_1 y_n(a) + a_2 y_n^{(1)}(a) = 0 \quad \textbf{14b}$$

$$b_1 y_m(b) + b_2 y_m^{(1)}(b) = 0 \quad \textbf{14c}$$

$$b_1 y_n(b) + b_2 y_n^{(1)}(b) = 0 \quad \textbf{14d}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração **Teorema 4.5**

Eqs. (14*a*) *e* (14*b*) *podem ser escritas como*:

$$\begin{aligned} a_1 y_m(a) + a_2 y_m^{(1)}(a) &= 0 \\ a_1 y_n(a) + a_2 y_n^{(1)}(a) &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_m(a) & y_m^{(1)}(a) \\ y_n(a) & y_n^{(1)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15a}$$

Eqs. (14*c*) *e* (14*d*) *podem ser escritas como*:

$$\begin{aligned} b_1 y_m(b) + b_2 y_m^{(1)}(b) &= 0 \\ b_1 y_n(b) + b_2 y_n^{(1)}(b) &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_m(b) & y_m^{(1)}(b) \\ y_n(b) & y_n^{(1)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15b}$$

Demonstração — Teorema 4.5

$Multiplicando\ (13a)\ por\ y_n(x),\ (13b)\ por\ y_m(x),\ e\ subtraindo-as:$

$$y_n \frac{d}{dx}\left(r(x).y_m^{(1)}\right) - y_m \frac{d}{dx}\left(r(x).y_n^{(1)}\right) = (\lambda_n - \lambda_m)\,p(x)\,y_n y_m$$

$Integrando-se\ esta\ igualdade\ em\ \int_a^b (.).dx:$

$$\int_a^b \left(y_n \frac{d}{dx}\left(r(x).y_m^{(1)}\right) - y_m \frac{d}{dx}\left(r(x).y_n^{(1)}\right)\right).dx = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b p(x)\,y_n y_m dx$$

$Com\ o\ método\ das\ partes\ no\ lado\ esquerdo:$

$$\int_a^b y_n \frac{d}{dx}\left(r(x).y_m^{(1)}\right).dx = r(x).y_m^{(1)} y_n \Big|_a^b - \int_a^b r(x).y_m^{(1)} y_n^{(1)} dx$$

$$\int_a^b y_m \frac{d}{dx}\left(r(x).y_n^{(1)}\right).dx = r(x).y_n^{(1)} y_m \Big|_a^b - \int_a^b r(x).y_m^{(1)} y_n^{(1)} dx$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Demonstração — Teorema 4.5

Obtemos :

$$r(x).y_m^{(1)}y_n\Big|_a^b - r(x).y_n^{(1)}y_m\Big|_a^b = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b p(x)y_n y_m.dx$$

$$r(b)\left(y_m^{(1)}(b)y_n(b) - y_n^{(1)}(b)y_m(b)\right) +$$

$$-r(a)\left(y_m^{(1)}(a)y_n(a) - y_n^{(1)}(a)y_m(a)\right) = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b p(x)y_n y_m.dx$$

Demonstração **Teorema 4.5**

$$\textit{Neste ponto, usamos os SQHs das Eqs.}\ (15a)\ e\ (15b):$$

$$\begin{bmatrix} y_m(a) & y_m^{(1)}(a) \\ y_n(a) & y_n^{(1)}(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{15a}$$

$$\begin{bmatrix} y_m(b) & y_m^{(1)}(b) \\ y_n(b) & y_n^{(1)}(b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{15b}$$

Estes SQHs devem ser satisfeitos por soluções não−triviais que obrigam as respectivas matrizes a serem Singulares $(DET = Zero)$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow y_m(a)\,y_n^{(1)}(a) - y_n(a)\,y_m^{(1)}(a) = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow y_m(b)\,y_n^{(1)}(b) - y_n(b)\,y_m^{(1)}(b) = 0$$

Demonstração **Teorema 4.5**

$$r(b)\left(y_m^{(1)}(b)\,y_n(b)-y_n^{(1)}(b)\,y_m(b)\right)+$$

$$-r(a)\left(y_m^{(1)}(a)\,y_n(a)-y_n^{(1)}(a)\,y_m(a)\right)=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b p(x)\,y_n\,y_m.dx$$

$$Pela\ Singularidade\ dos\ SQHs \Rightarrow \begin{cases} y_m(a)\,y_n^{(1)}(a)-y_n(a)\,y_m^{(1)}(a)=0 \\ y_m(b)\,y_n^{(1)}(b)-y_n(b)\,y_m^{(1)}(b)=0 \end{cases}$$

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b p(x)\,y_n\,y_m.dx=0\ ,\ como\ \lambda_n\neq\lambda_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_a^b p(x)\,y_n\,y_m.dx=0}$$

Soluções não-triviais de um Problema Sturm-Liouville [*PSL*]
$y_n(x)\neq 0$ e $y_m(x)\neq 0$, referentes a valores λ distintos, $\lambda_n\neq\lambda_m$, são funções ortogonais em *[a,b]* com peso *p(x)*.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Portanto, para estabelecer o surgimento de Família $\{\varphi_n(x)\}$ Ortogonal (em $[a,b\ ]$, sob $p(x)$), em um dado Problema de Valor de Contorno (*PVC*) em EDO-2, deve-se estudá-lo cuidadosamente para verificar se ele é um Problema de Sturm-Liouville [*PSL*]. Isto é, para verificar se estamos diante de um *Problema de Valor de Contorno com EDO-2 Linear Homogênea e Condições de Contorno Lineares e Homogêneas*.

Problemas *PSL* darão origem, ao serem resolvidos, a soluções ortogonais $\{\varphi_n(x)\}$. Estas soluções devem ser pesquisadas atribuindo-se série de valores adequados ao parâmetro λ conforme garantido pelo Teorema 4.5.

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Recapitulando a forma de um Problema Sturm-Liouville [*PSL*]

EDO − 2 Linear Homogênea :

$$\frac{d}{dx}\left(r(x).y^{(1)}\right)+\left\{q(x)+\lambda.p(x)\right\}y=0 \qquad \textbf{13}$$

Condições de Contorno Lineares e Homogêneas :

$$a_1 y(a)+a_2 y^{(1)}(a)=0$$

$$b_1 y(b)+b_2 y^{(1)}(b)=0 \qquad \textbf{14}$$

onde :

a, b *pontos dados para aplicação de Condições de Contorno*

a_1, a_2 *const., dadas, não nulas ao mesmo tempo;*

b_1, b_2 *const., dadas, não nulas ao mesmo tempo;*

$r(x)$ *e* $p(x)$ *dadas e contínuas em* $[a,b]$; $q(x)$ *dada e contínua em* (a,b)

λ *parâmetro a buscar para viabilizar Solução Não − Trivial*

Exemplo 4.3 : Obter a Solução do Problema de Valor de Contorno abaixo:

$$y^{(2)} + \lambda . y = 0$$

$$y(0) = 0 \ , \ y(L) = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

$$y^{(2)} + \lambda . y = 0$$
$$y(0) = 0 \ , \ y(L) = 0$$

Exemplo 4.3

Resolução

#1: **Reconhecemos neste *PVC* um *PSL* após colocação na forma:**

$$\frac{d}{dx}\left(y^{(1)}\right) + \lambda . y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(x) = 1 \\ p(x) = 1 \\ q(x) = 0 \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \{a = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \qquad \Rightarrow \{b = L,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#2: Resolvendo *PVC* para EDO-2 Lin. Hom. com Coef. Const. :

$$y(x) = exp(\theta . x)$$

$$Substituindo-se\ em\ \ y^{(2)} + \lambda . y = 0 \ \Rightarrow Eq.\ Característica : \theta^2 + \lambda = 0$$

$$Raízes\ da\ E.C. : \theta = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

$$A\ Sol.\ Completa\ \ da\ \ EDO-2\ Homogênea\ apresenta\ 3\ casos\ em\ \lambda :$$

$$Caso\ 1 : \lambda < 0$$

$$Caso\ 2 : \lambda = 0$$

$$Caso\ 3 : \lambda > 0$$

#3: Caso 1 : $\lambda < 0 \rightarrow 2$ *raízes reais distintas* $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow Sol.\ Compl.\ Hom.\ \ y_H(x) = C_1 \exp(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$CCs\ \ para\ \ y_H(x):\ \ C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \exp(L\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-L\sqrt{-\lambda}) = 0$$

$$CCs\ como\ SQH:\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(L\sqrt{-\lambda}) & \exp(-L\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \left[\underline{\underline{M}}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DET(\underline{\underline{M}}) = \exp(-L\sqrt{-\lambda}) - \exp(L\sqrt{-\lambda}) \neq 0\ \ para\ \lambda < 0\ (\underline{\underline{M}}\ \ não\ singular)$$

$$SQH\ \ só\ admite\ a\ Sol.\ Trivial\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$$

Caso 1 sem $y(x) \neq 0$

#4: Caso 2 : $\lambda = 0 \rightarrow$ 2 raízes reais iguais (raiz dupla) $\theta = 0$

$$\theta = 0 \Rightarrow \text{Sol. Compl. Hom. } y_H(x) = C_1 \exp(0x) + C_2.x.\exp(0x)$$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 + C_2.x$$

$$CCs \text{ para } y_H(x): \quad C_1 + 0.C_2 = 0$$

$$C_1 + L.C_2 = 0$$

$$CCs \text{ como } SQH : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \left[\underline{\underline{M}}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DET(\underline{\underline{M}}) = L \neq 0 \; (\underline{\underline{M}} \text{ não singular})$$

$$SQH \text{ só admite a Sol. Trivial } \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$$

Caso 2 sem $y(x) \neq 0$

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow$ 2 raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow Sol.\ Compl.\ Hom.\ y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + C_2 sen(x\sqrt{\lambda})$$

$$CCs\ para\ y_H(x):\ \ C_1 + 0.C_2 = 0$$

$$C_1 \cos(L\sqrt{\lambda}) + C_2 sen(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$CCs\ como\ SQH:\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(L\sqrt{\lambda}) & sen(L\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \left[\underline{\underline{M}}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DET(\underline{\underline{M}}) = sen(L\sqrt{\lambda}) \Rightarrow DET(\underline{\underline{M}}) = 0\ se\ \sqrt{\lambda} = \pm 1.\frac{\pi}{L}, \pm 2.\frac{\pi}{L}, \pm 3.\frac{\pi}{L}, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n.\frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 2^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 3^2.\frac{\pi^2}{L^2}, \ldots\ \ \lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{L^2}\ (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$SQH\ tem\ Sols.\ Não-Triv.:\ \left.\begin{array}{c} C_1 + 0.C_2 = 0 \\ C_1 \cos(\pm n\pi) + C_2 sen(\pm n\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 \neq 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow$ *2 raízes complexas conj.* $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n.\frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 2^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 3^2.\frac{\pi^2}{L^2}, \ldots \quad \lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{L^2}\ (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$y_H(x) = C_2 sen(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 sen(\pm\frac{n\pi x}{L}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 sen(\frac{n\pi x}{L})$$

Por q?

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = sen(\frac{n\pi x}{L})\ (n = 1,2,\ldots)}$$

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow$ 2 raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n.\frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 2^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 3^2.\frac{\pi^2}{L^2}, \ldots \quad \lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{L^2}\ (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$y_H(x) = C_2 sen(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 sen(\pm\frac{n\pi x}{L}) \Rightarrow y_H(x) = C_2 sen(\frac{n\pi x}{L})$$

Por q?

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = sen(\frac{n\pi x}{L})\ (n = 1,2,\ldots)}$$

Identifica-se a Família $\{\, y_n(x) \,\}$ sem C_2

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#6: Surge, portanto, deste *PVC*, a Família Ortogonal de Soluções :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = sen(\frac{n\pi x}{L}) \; (n = 1,2,\ldots)}$$

$$\boxed{\{y_n(x)\} = \{sen(\frac{n\pi x}{L})\} \quad (n = 1,2,\ldots)}$$

$$Família \perp em \; [0, L] \; sob \; peso \; p(x) = 1$$

$$\begin{cases} \int_0^L sen(\frac{n\pi x}{L}).sen(\frac{m\pi x}{L}).dx = 0 & (n \neq m) \\ \int_0^L sen^2(\frac{n\pi x}{L}).dx = \frac{L}{2} & (n = m) \end{cases}$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

Exemplo 4.4 : Obter a Solução do Problema de Valor de Contorno abaixo:

$$y^{(2)} + \lambda . y = 0$$

$$y^{(1)}(0) = 0 \;,\; y^{(1)}(L) = 0$$

$$y^{(2)} + \lambda . y = 0$$
$$y^{(1)}(0) = 0 \ , \ y^{(1)}(L) = 0$$

Exemplo 4.4

Resolução

#1: Reconhecemos neste *PVC* um *PSL* após colocação na forma :

$$\frac{d}{dx}\left(y^{(1)}\right) + \lambda . y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(x) = 1 \\ p(x) = 1 \\ q(x) = 0 \end{cases}$$

$$y^{(1)}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \{a = 0, \quad a_1 = 0, a_2 = 1$$

$$y^{(1)}(L) = 0 \qquad \Rightarrow \{b = L, \quad b_1 = 0, b_2 = 1$$

#2: Resolvendo *PVC* para EDO-2 Lin. Hom. com Coef. Const. :

$$y(x) = exp(\theta . x)$$

$$Substituindo-se\ em\ \ y^{(2)} + \lambda . y = 0 \ \Rightarrow Eq.\ Característica: \theta^2 + \lambda = 0$$

$$Raízes\ da\ E.C.: \theta = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

$$A\ Sol.\ Completa\ \ da\ \ EDO-2\ Homogênea\ apresenta\ 3\ casos\ em\ \lambda:$$

$$Caso\ 1: \lambda < 0$$

$$Caso\ 2: \lambda = 0$$

$$Caso\ 3: \lambda > 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#3: Caso 1 : $\lambda < 0 \rightarrow 2$ raízes reais distintas $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow Sol.\ Compl.\ Hom.\ y_H(x) = C_1 \exp(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$CCs\ \ para\ \ y_H^{(1)}(x) = C_1\sqrt{-\lambda}\exp(x\sqrt{-\lambda}) - C_2\sqrt{-\lambda}\exp(-x\sqrt{-\lambda})$$

$$C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$C_1\sqrt{-\lambda}\exp(L\sqrt{-\lambda}) - C_2\sqrt{-\lambda}\exp(-L\sqrt{-\lambda}) = 0$$

$$CCs\ como\ SQH: \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda}\exp(L\sqrt{-\lambda}) & -\sqrt{-\lambda}\exp(-L\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{\underline{M}}]\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow DET(\underline{\underline{M}}) = \lambda(\exp(-L\sqrt{-\lambda}) - \exp(L\sqrt{-\lambda})) \neq 0\ \ para\ \lambda < 0$$

$$SQH\ \ só\ admite\ a\ Sol.Trivial \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_H(x) = 0$$

Caso 1 sem $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#4: Caso 2 : $\lambda = 0 \rightarrow$ *2 raízes reais iguais (raiz dupla)* $\theta = 0$

$$\theta = 0 \Rightarrow Sol.\ Compl.\ Hom.\ y_H(x) = C_1 \exp(0x) + C_2 .x.\exp(0x)$$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 + C_2 .x$$

$$CCs\ para\ y_H^{(1)}(x) = 0.C_1 + C_2$$

$$0.C_1 + C_2 = 0 \quad (x = 0)$$

$$0.C_1 + C_2 = 0 \quad (x = L)$$

$$CCs\ como\ SQH : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \left[\underline{\underline{M}}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow DET(\underline{\underline{M}}) = 0$$

$$SQH\ admite\ a\ Sol.\ Não-Trivial\ C_1 \neq 0, C_2 = 0 \Rightarrow y_H(x) = C_1$$

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$\boxed{\lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1}$$

Caso 2 com $y(x) \neq 0$

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow$ 2 raízes complexas conj. $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$\theta = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow \text{Sol. Compl. Hom. } y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + C_2 sen(x\sqrt{\lambda})$$

$$CCs \;\; para \;\; y_H^{(1)}(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\, sen(x\sqrt{\lambda}) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})$$

$$0.C_1 + C_2\sqrt{\lambda} = 0$$

$$-C_1\sqrt{\lambda}\, sen(L\sqrt{\lambda}) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$CCs \; como \; SQH: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -sen(L\sqrt{\lambda}) & \cos(L\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \left[\underline{\underline{M}}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DET(\underline{\underline{M}}) = sen(L\sqrt{\lambda}) \Rightarrow DET(\underline{\underline{M}}) = 0 \;\; se \;\; \sqrt{\lambda} = \pm 1.\frac{\pi}{L}, \pm 2.\frac{\pi}{L}, \pm 3.\frac{\pi}{L}, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \pm n.\frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = 1^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 2^2.\frac{\pi^2}{L^2}, 3^2.\frac{\pi^2}{L^2}, \ldots \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \;\; (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$SQH \;\; tem \;\; Sols. \; Não-Triv.: \left.\begin{array}{c} 0.C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 sen(\pm n\pi) + C_2\cos(\pm n\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 \neq 0,\; C_2 = 0$$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow$ *2 raízes complexas conj.* $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos(\pm\frac{n\pi x}{L}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L})\ (n = 1,2,\ldots)}$$

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#5: Caso 3 : $\lambda > 0 \rightarrow 2$ *raízes complexas conj.* $\theta = \pm(-\lambda)^{1/2} = \pm i\,(\lambda)^{1/2}$

$$y_H(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda_n}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos(\pm\frac{n\pi x}{L}) \Rightarrow y_H(x) = C_1 \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L})\ (n = 1,2,\ldots)}$$

Identifica-se a Família $\{\, y_n(x) \,\}$ sem C_1

Caso 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#6: Reunindo Casos 2 e 3 com Soluções Não-Triviais do *PSL*

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = 1 & (n = 0) \\ \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos(\dfrac{n\pi x}{L}) & (n = 1,2,\ldots) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L}) \; (n = 0,1,2,\ldots)}$$

Casos 2 e 3 com $y(x) \neq 0$

Cap. IV : Funções Ortogonais e Séries de Fourier
3. Teorema de Sturm-Liouville

#7: Surge deste *PVC*, a Família Ortogonal de Soluções :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_n(x) = cos(\frac{n\pi x}{L})\ (n = 0,1,2,...)}$$

$$\boxed{\{y_n(x)\} = \{cos(\frac{n\pi x}{L})\} \quad (n = 0,1,2,...)}$$

$$Família \perp em\ [0, L]\ sob\ peso\ p(x) = 1$$

$$\begin{cases} \int_0^L cos(\frac{n\pi x}{L}).cos(\frac{m\pi x}{L}).dx = 0 & (n \neq m) \\ \int_0^L cos^2(\frac{n\pi x}{L}).dx = \frac{L}{2}\ (n = m > 0),\ \int_0^L 1.dx = L\ (n = m = 0) \end{cases}$$