DISCIPLINA

Métodos Matemáticos Aplicados a Processos Químicos e Bioquímicos

Capítulo III : Equações Diferenciais Ordinárias

José Luiz de Medeiros e Ofélia Q.F. Araújo
Engenharia Química – UFRJ
jlm@eq.ufrj.br, ofelia@eq.ufrj.br
Tel. 21-2562-7535

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
1. Definições

x : *Variável independente*

y : *Variável dependente*

$y^{(k)}$: $\dfrac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1,2,\ldots$

$y(x)$: *Relação matemática procurada*

EDO : *Equação Diferencial Ordinária* = *Eq. com* $x, y, y^{(1)}, y^{(2)}\ldots$

Ordem : *Maior ordem de diferenciação na EDO*

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
1. Definições

Linearidade - EDO de *O(n)* é Linear quando tem a forma :

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(x)y^{(k)} + P_0(x)y = R(x)$$

Coeficientes da EDO Linear dependem apenas da Variável Independente

A EDO Linear abaixo, tem a seguinte Propriedade :

$$g(x,y,y^{(1)},\ldots,y^{(n)}) = R(x)$$

$$g(x,y_A+y_B,y_A^{(1)}+y_B^{(1)},\ldots,y_A^{(n)}+y_B^{(n)}) =$$

$$= g(x,y_A,y_A^{(1)},\ldots,y_A^{(n)}) + g(x,y_B,y_B^{(1)},\ldots,y_B^{(n)})$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
1. Definições

Linearidade - EDO de *O(n)* é Linear quando tem a forma :

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(x)y^{(k)} + P_0(x)y = R(x)$$

Coeficientes da EDO Linear dependem apenas da Variável Independente

A EDO Linear abaixo, tem a seguinte Propriedade :

$$g(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = R(x)$$

$$g(x, y_A + y_B, y_A^{(1)} + y_B^{(1)}, \ldots, y_A^{(n)} + y_B^{(n)}) =$$

$$= g(x, y_A, y_A^{(1)}, \ldots, y_A^{(n)}) + g(x, y_B, y_B^{(1)}, \ldots, y_B^{(n)})$$

$$y^{(2)} + 2xy^{(1)} + xy^2 = exp\left(\frac{x^3 - \sqrt{x+7}}{x^2 + 2x + 2}\right)$$

É Não Linear

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
1. Definições

SOLUÇÕES

Solução Geral (SG) : Solução da EDO com constantes arbitrárias

Solução Particular (SP) : Solução obtida da SG fixando-se valor para constantes arbitrárias

Solução Singular (SS) : Solução que não pode ser obtida da SG por atribuição às constantes arbitrárias

Solução Completa (SC) : SG que produz qualquer solução da EDO pela atribuição adequada de valor às constantes arbitrárias

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
2. EDO Linear de Ordem 1

$$\boxed{P_1(x)y^{(1)} + P_0(x)y = R(x)}$$

Dividindo-se por *$P_1(x)$ ($\neq 0$)* e redefinindo-se termos :

$$\boxed{y^{(1)} + p(x)y = q(x)}$$

$$\begin{cases} p(x) = P_0(x)/P_1(x) \\ q(x) = R(x)/P_1(x) \end{cases}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
2. EDO Linear de Ordem 1

$$\boxed{y^{(1)} + p(x)y = q(x)}$$

Resolução

Multiplica-se a EDO por um fator a especificar *F(x)* :

$$F(x)y^{(1)} + p(x)F(x)y = F(x)q(x) \qquad \boxed{1}$$

Escolhe-se *F(x)* tal que

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = p(x)F(x)}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = p(x)F(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{F(x)} = p(x)dx \Rightarrow ln(F(x)) = \int p(x)dx$$

$$F(x) = exp\left(\int p(x)dx\right)$$

Assim a Eq. (1), escreve-se

$$F(x)y^{(1)} + y\frac{dF(x)}{dx} = F(x)q(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(yF(x)\right) = F(x)q(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
2. EDO Linear de Ordem 1

$$\boxed{y^{(1)} + p(x)y = q(x)}$$

Resolução

$$\frac{d}{dx}\left(yF(x)\right) = F(x)q(x) \Rightarrow yF(x) = Cte + \int F(x)q(x)dx$$

$$\boxed{y = Cte / F(x) + \frac{1}{F(x)}\int F(x)q(x)dx}$$

1b

F(x) **é o Fator de Integração da EDO**

$$\boxed{F(x) = exp\left(\int p(x)dx\right)}$$

1c

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
2. EDO Linear de Ordem 1

$$\boxed{y^{(1)} + p(x)y = q(x)}$$

Resolver a EDO abaixo :

Exemplo 3.1

$$y^{(1)} + y = e^{x}$$

$$p(x) = 1, \quad q(x) = e^{x} \;\Rightarrow F(x) = exp\left(\int dx\right) = e^{x}$$

$$y = C / F(x) + \frac{1}{F(x)} \int F(x) Q(x) dx$$

$$y = Ce^{-x} + e^{-x} \int e^{2x} dx$$

$$\boxed{y = Ce^{-x} + \frac{e^{x}}{2}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$x \quad : Variável\ independente$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} : Vetor\ n\,x\,1\ de\ variáveis\ dependentes$$

$$\underline{y}^{(1)} \quad : \frac{d\,\underline{y}}{dx}$$

$$\underline{y}(x) \quad : Relação\ matemática\ procurada$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$y^{(1)} + p(x)y = q(x)$$

EDO Linear de Ordem 1

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

Sistema EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} : n\,x\,1 \quad , \quad \underline{\underline{p}}(x) \quad : n\,x\,n \quad , \quad \underline{q}(x) \quad : n\,x\,1$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\boxed{y^{(1)} + p(x)y = q(x)}$$

EDO Linear de Ordem 1

$$\boxed{\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)}$$

Sistema EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} : n\,x\,1 \quad , \quad \underline{\underline{p}}(x) \quad : n\,x\,n \quad , \quad \underline{q}(x) \quad : n\,x\,1$$

Para resolução é necessário generalizar a função exponencial ordinária e^x para o contexto matricial. Definimos, portanto, a Operação Matricial conhecida como Exponencial Matricial.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Define-se a Exponencial Matricial para qualquer matriz quadrada *A* (seja esta singular ou não), tamanho *n x n*, pela série infinita de potencias inteiras da matriz *A* abaixo :

$$exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots$$

$$\underline{\underline{A}},\ exp(\underline{\underline{A}}) : Matrizes\ \ n\, x\, n$$

Propriedades da Exponencial Matricial

$P1 : \underline{\underline{A}}$ *e* $exp(\underline{\underline{A}})$ *comutam*

Teorema 3.1

$$\underline{\underline{A}}\,exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots\right) =$$

$$= \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^4 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^5 + \ldots =$$

$$= \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots\right)\underline{\underline{A}} = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,exp(\underline{\underline{A}}) = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Propriedades da Exponencial Matricial

$P1b : \underline{\underline{A}}^{-1}$ *e* $exp(\underline{\underline{A}})$ *comutam*

Teorema 3.1b

$$\underline{\underline{A}}^{-1} exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \dots\right) =$$

$$= \underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{I}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}} + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^3 + \dots =$$

$$= \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \dots\right)\underline{\underline{A}}^{-1} = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^{-1} exp(\underline{\underline{A}}) = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^{-1}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Propriedades da Exponencial Matricial

$P1c : \underline{\underline{A}}^k \; (k \in I) \; e \; exp(\underline{\underline{A}}) \; comutam$

Teorema 3.1c

$$\underline{\underline{A}}^k exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^k \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots \right) =$$

$$= \underline{\underline{A}}^k + \underline{\underline{A}}^{k+1} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^{k+2} + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^{k+3} + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^{k+4} + \ldots =$$

$$= \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots \right)\underline{\underline{A}}^k = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^k$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^k exp(\underline{\underline{A}}) = exp(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^k}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Propriedades da Exponencial Matricial

Teorema 3.2

$$P2 : Inversa\ de\ exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots$$

$$é \qquad exp(-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 - \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 - \ldots$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$exp(-\underline{\underline{A}})exp(\underline{\underline{A}}) = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 - \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 - ..\right)\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + ...\right) =$$

$$\begin{aligned}
= \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \frac{1}{5!}\underline{\underline{A}}^5 ... \\
- \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^3 - \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^4 - \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^5 - ... \\
+ \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{2!2!}\underline{\underline{A}}^4 + \frac{1}{2!3!}\underline{\underline{A}}^5 + ... \\
- \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 - \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^4 - \frac{1}{2!3!}\underline{\underline{A}}^5 - ... \\
+ \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^5 + ... \\
- \frac{1}{5!}\underline{\underline{A}}^5 - ...
\end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{I}}$$

$$\boxed{\left[exp(\underline{\underline{A}})\right]^{-1} = exp(-\underline{\underline{A}})}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$P3$: *Fatoração* $exp(\underline{\underline{A}})$ *qdo* $\underline{\underline{A}}$ *tem n Autovetores LI [via Teor.2.20]*

Teorema 3.3

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \text{ Autovetores Normalizados de } \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \left[\underline{\underline{Diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}} \right] \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^2\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^3 = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^2\,\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^3\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^k\,\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + \ldots =$$

$$= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} + \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{2!}\underline{\underline{\lambda}}^2\right)\underline{\underline{P}}^{-1} + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{3!}\underline{\underline{\lambda}}^3\right)\underline{\underline{P}}^{-1} + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{4!}\underline{\underline{\lambda}}^4\right)\underline{\underline{P}}^{-1} + \ldots$$

$$exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\lambda}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{\lambda}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{\lambda}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{\lambda}}^4 + \ldots\right)\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\boxed{exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{P}}\left[exp(\underline{\underline{\lambda}})\right]\underline{\underline{P}}^{-1}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$P4 : Fatoração\ exp(\underline{\underline{A}})\ qdo\ \underline{\underline{A}}\ Simétrica\ [Teor.2.24]$

Teorema 3.4

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \text{ Autovetores Normalizados de } \underline{\underline{A}} \text{ Simétrica então } \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \left[\underline{\underline{Diag(\lambda_1,...,\lambda_n)}} \right] \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{P}_2 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T$$

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^2\,\underline{\underline{P}}^T \Rightarrow \underline{\underline{A}}^3 = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T\,\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^2\,\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^3\,\underline{\underline{P}}^T \Rightarrow \underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^k\,\underline{\underline{P}}^T$$

$$exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4 + ... =$$

$$= \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{2!}\underline{\underline{\lambda}}^2\right)\underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{3!}\underline{\underline{\lambda}}^3\right)\underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}}\left(\frac{1}{4!}\underline{\underline{\lambda}}^4\right)\underline{\underline{P}}^T + ...$$

$$exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\lambda}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{\lambda}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{\lambda}}^3 + \frac{1}{4!}\underline{\underline{\lambda}}^4 + ...\right)\underline{\underline{P}}^T$$

$$\boxed{exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{P}}\left[exp(\underline{\underline{\lambda}})\right]\underline{\underline{P}}^T}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\boxed{P5: Se\ \underline{\underline{A}}(x)\ e\ \dot{\underline{\underline{A}}}(x) = \frac{d}{dx}\underline{\underline{A}}(x)\ comutam \Rightarrow \frac{d}{dx}exp(\underline{\underline{A}}) = \dot{\underline{\underline{A}}}\,exp(\underline{\underline{A}}) = exp(\underline{\underline{A}})\dot{\underline{\underline{A}}}}$$

Teorema 3.5

$$exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}}(x) + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2(x) + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3(x) + \frac{1}{4!}\underline{\underline{A}}^4(x) + \ldots$$

$$\frac{d}{dx}exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \dot{\underline{\underline{A}}} + \frac{1}{2!}\left[\dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}}\right] + \frac{1}{3!}\left[\dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2\dot{\underline{\underline{A}}}\right] + \ldots$$

$$Quando\ \ \underline{\underline{A}}(x)\ e\ \dot{\underline{\underline{A}}}(x)\ comutam:$$

$$\frac{d}{dx}exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \dot{\underline{\underline{A}}} + \dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}}^3\ldots$$

$$\frac{d}{dx}exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \dot{\underline{\underline{A}}}\left[\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \ldots\right] = \left[\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \ldots\right]\dot{\underline{\underline{A}}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \dot{\underline{\underline{A}}}\,exp(\underline{\underline{A}}(x)) = exp(\underline{\underline{A}}(x))\dot{\underline{\underline{A}}}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Exemplos de Casos Matriciais onde $\underline{\underline{A}}(x)$ *e* $\dot{\underline{\underline{A}}}(x)$ *comutam :*

$$\underline{\underline{A}}(x) = \underline{\underline{K}}x \Rightarrow \dot{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{K}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}}^2 x$$

$$\underline{\underline{A}}(x) = \underline{\underline{K}}x^n \Rightarrow \dot{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{K}}nx^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}}^2 nx^{2n-1}$$

$$\underline{\underline{A}}(x) = \underline{\underline{K}}g(x) \Rightarrow \dot{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{K}}\dot{g}(x) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}} = \dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}}^2 g(x)\dot{g}(x)$$

$$\underline{\underline{A}}(x) = \sum_{n=1}^{N} \underline{\underline{K}}^n g_n(x) \Rightarrow \dot{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=1}^{N} \underline{\underline{K}}^n \dot{g}_n(x) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=1}^{N} \underline{\underline{K}}^n g_n(x) \sum_{m=1}^{N} \underline{\underline{K}}^m \dot{g}_m(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\dot{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \underline{\underline{K}}^{n+m} g_n(x)\dot{g}_m(x) = \dot{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{A}} = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \underline{\underline{K}}^{n+m} \dot{g}_m(x) g_n(x)$$

Para estes casos vale $\dfrac{d}{dx} exp(\underline{\underline{A}}(x)) = \dot{\underline{\underline{A}}}\, exp(\underline{\underline{A}}(x)) = exp(\underline{\underline{A}}(x))\dot{\underline{\underline{A}}}$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Comando Matlab para calcular Exponencial Matricial de matriz *A* :

$$expm(A)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

De posse do conceito de Exponencial Matricial, voltamos a considerar a Solução do Sistema de EDOs Lineares de *O(1)* :

$$\boxed{\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; \underline{\underline{p}}(x) \; n\,x\,n \; , \; \underline{q}(x) \; n\,x\,1$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

Pré-multiplica-se o sistema pela matriz *n x n* a especificar *F(x)* :

$$\underline{\underline{F}}(x)\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{F}}(x)\underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)$$

Escolhe-se *F(x)* tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\underline{\underline{F}}(x) = \underline{\underline{F}}(x)\underline{\underline{p}}(x) = \underline{\underline{p}}(x)\underline{\underline{F}}(x) \\ \\ Sob\ comutabilidade\ entre\ \underline{\underline{p}}(x)\ e\ \int \underline{\underline{p}}(x)dx \end{cases}$$

Assim, com Teor. 3.5 :

$$\frac{d}{dx}\underline{\underline{F}}(x) = \underline{\underline{F}}(x)\underline{\underline{p}}(x) \Rightarrow \underline{\underline{F}}(x) = exp\left(\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)$$

Voltando na EDO :

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{\underline{F}}(x)\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{F}}(x)\underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{F}}(x)\underline{y}^{(1)} + \left[\frac{d}{dx}\underline{\underline{F}}(x)\right]\underline{y} = \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\underline{\underline{F}}(x)\underline{y}\right] = \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{F}}(x)\underline{y} = \underline{C} + \int \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)dx \Rightarrow \underline{y} = \underline{\underline{F}}^{-1}\underline{C} + \underline{\underline{F}}^{-1}\int \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)dx$$

$$\boxed{\underline{y} = \underline{\underline{F}}^{-1}\underline{C} + \underline{\underline{F}}^{-1}\int \underline{\underline{F}}(x)\underline{q}(x)dx} \qquad \boxed{\underline{\underline{F}}(x) = exp\left(\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)}$$

2

Ou ainda :

$$\boxed{\underline{y} = exp\left(-\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)\underline{C} + exp\left(-\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)\int exp\left(\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)\underline{q}(x)dx}$$

3

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\boxed{\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)}$$

Caso Particular CP1 para Sistema de EDOs Lineares :

$$\boxed{\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \;\; \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}$$

Aplicando Eq. (3) com $\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}}, \ \underline{q}(x) = \underline{U}$

$$\underline{y} = exp\left(-\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right).\underline{C} + exp\left(-\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right)\int exp\left(\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right).\underline{q}(x)dx$$

$\Downarrow$

$$\int \underline{\underline{p}}(x)dx = -\underline{\underline{A}}x \Rightarrow exp\left(-\int \underline{\underline{p}}(x)dx\right) = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right)$$

$\Downarrow$

$$\underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + exp\left(\underline{\underline{A}}x\right)\int exp\left(-\underline{\underline{A}}x\right).\underline{U}dx$$

$\Downarrow$

$$\underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + exp\left(\underline{\underline{A}}x\right)\left(\int exp\left(-\underline{\underline{A}}x\right)dx\right).\underline{U}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\boxed{\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}} \Rightarrow \boxed{\underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + exp\left(\underline{\underline{A}}x\right)\left(\int exp\left(-\underline{\underline{A}}x\right)dx\right).\underline{U}}$$

Fazendo a integral nesta expressão com a série da Exponencial :

$$\int exp(-\underline{\underline{A}}x)dx = \int\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}x + \frac{x^2}{2!}\underline{\underline{A}}^2 - \frac{x^3}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{x^4}{4!}\underline{\underline{A}}^4 - \ldots\right)dx$$

$$\int exp(-\underline{\underline{A}}x)dx = \underline{\underline{I}}x - \frac{x^2}{2!}\underline{\underline{A}} + \frac{x^3}{3!}\underline{\underline{A}}^2 - \frac{x^4}{4!}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{x^5}{5!}\underline{\underline{A}}^4 - \ldots = \underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{\underline{I}} - exp(-\underline{\underline{A}}x)\right)$$

$$\boxed{\int exp(-\underline{\underline{A}}x)dx = \left(\underline{\underline{I}} - exp(-\underline{\underline{A}}x)\right)\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{\underline{I}} - exp(-\underline{\underline{A}}x)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1 de Sistema de EDOs Lineares

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}(x) = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U} \qquad \boxed{4}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1 de Sistema de EDOs Lineares

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \ \ \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{y}(x) = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U} \tag{4}$$

Sob Condição Inicial

$$\underline{y}(x=0) = \underline{y}_0$$

$$\underline{y}(x) = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{y}_0 + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U} \tag{4b}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

Caso Particular CP1b para Sistema de EDOs Lineares :

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} \; tem \; n \; Autovetores \; LI \; (normaliz.) \Rightarrow \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\underline{y} + \underline{U}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1b diretamente com Eq. (4) adicionando-se a Fatoração seguinte e o Teor. 3.3 :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}x = \underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} \Rightarrow \quad exp(\,\underline{\underline{A}}x\,) = \underline{\underline{P}}\left[exp(\,\underline{\underline{\lambda}}x\,)\right]\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \;:\; Auvetores\;\; Normaliz.\, em\;\; Colunas$$

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad : \; Autovalores\;\; em\;\; Diagonal$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1b :

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}, \quad exp(\underline{\underline{A}}x) = \underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U} \qquad \boxed{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U} \qquad \boxed{5}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1b :

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}, \quad exp(\underline{\underline{A}}x) = \underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U} \qquad \mathbf{5}$$

Sob Condição Inicial

$$\underline{y}(x=0) = \underline{y}_0$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{y}_0 + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U} \qquad \mathbf{5b}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

Caso Particular CP1c para Sistema de EDOs Lineares :

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv constante, \ \ \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} \ Simétrica \Rightarrow n \ \ Autovetores \perp \Rightarrow \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\underline{y} + \underline{U}$$

Solução do Caso Particular CP1c diretamente com Eq. (4) adicionando-se a Fatoração de matrizes simétricas e o Teor. 3.4 :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T \Rightarrow \underline{\underline{A}}x = \underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^T \Rightarrow exp(\underline{\underline{A}}x) = \underline{\underline{P}}\left[exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\right]\underline{\underline{P}}^T$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \cdots & \underline{P}_n \end{bmatrix} : Auvetores\ Normaliz.\ em\ Colunas$$

$$\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} : Autovalores\ em\ Diagonal$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1c :

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv simétrica, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T, \quad exp(\underline{\underline{A}}x) = \underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^T$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y}^{(1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = exp\left(\underline{\underline{A}}x\right).\underline{C} + \left(exp\left(\underline{\underline{A}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U} \qquad \boxed{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^T.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{P}}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^T.\underline{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^T.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^T.\underline{U} \qquad \boxed{6}$$

Vantagem sobre CP1 e CP1b : Não é Necessário Inverter Matriz !

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Solução do Caso Particular CP1c :

$$\underline{y}^{(1)} + \underline{\underline{p}}(x)\underline{y} = \underline{q}(x)$$

$$\underline{\underline{p}}(x) = -\underline{\underline{A}} \equiv simétrica, \quad \underline{q}(x) = \underline{U} \equiv constante$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{P}}^T, \quad exp(\underline{\underline{A}}x) = \underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^T$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^T.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^T.\underline{U} \quad \boxed{6}$$

Sob Condição Inicial

$$\underline{y}(x=0) = \underline{y}_0$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^T.\underline{y}_0 + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^T.\underline{U} \quad \boxed{6b}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Exemplo 3.2

Gerar o Plano de Fase do Sistema de 2 EDOs abaixo :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, \quad a = 0.1, b = 0.1$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Exemplo

Identificando *A* e *U* : Caso Particular CP1b

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, \quad a = 0.1, b = 0.1$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}, \underline{U} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, a > 0, b > 0$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Processando a Solução Estacionária :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} y_1^{EE} \\ y_2^{EE} \end{bmatrix} + \underline{U} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^{EE} \\ y_2^{EE} \end{bmatrix} = -\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{U}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}, \underline{U} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, a = 0.1, b = 0.1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1} \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^{EE} \\ y_2^{EE} \end{bmatrix} = -\frac{1}{a^2+1} \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = \frac{b}{a^2+1} \begin{bmatrix} a+1 \\ a-1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1^{EE} \\ y_2^{EE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ -0.0891 \end{bmatrix}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

O Plano de Fase é obtido traçando-se diversas trajetórias $(y_1(x),y_2(x))$ a partir de vários estados iniciais (y_{10}, y_{20}). Temos as Fases : (i) Obter a Solução Geral; (ii) Aplicar condição inicial; e (iii) Traçar as várias órbitas variando-se as condições iniciais.

Fase 1 : Obtendo Solução Geral

Caso Particular CP1b

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} + \underline{U}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}, \underline{U} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, a > 0, b > 0$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Fase 1 : Re-escrevendo Solução Geral

Caso Particular CP1b

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\lambda}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \underline{\underline{P}}\left(exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right) - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \left(\underline{\underline{P}}\,exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Fase 2 : Aplicando Condição Inicial

Caso Particular CP1b

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{C} + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\underline{y}(x = 0) = \underline{y}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{y}_0 + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Fase 2 : Processando Solução com Condição Inicial

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right) \underline{\underline{P}}^{-1} . \underline{y}_0 + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right) \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right) \underline{\underline{A}}^{-1} . \underline{U}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}, \underline{U} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Inversa : \ \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1} \begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

$$Autovalores :$$

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & 1 \\ -1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a + i \\ \lambda_2 = -a - i \end{cases}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Fase 2 : Processando Solução com Condição Inicial

$$\boxed{\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right) \underline{\underline{P}}^{-1} . \underline{y}_0 + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right) \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right) \underline{\underline{A}}^{-1} . \underline{U}}$$

$$Autovetores \begin{cases} \lambda_1 = -a + i \\ \lambda_2 = -a - i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -a-\lambda_1 & 1 \\ -1 & -a-\lambda_1 \end{bmatrix} \underline{X}_1 = 0 \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} -a-\lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{P}_1$$

$$\begin{bmatrix} -a-\lambda_2 & 1 \\ -1 & -a-\lambda_2 \end{bmatrix} \underline{X}_2 = 0 \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} -a-\lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{P}_2$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Não Nec. Normalizar

Por quê ?

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} -a+i & 0 \\ 0 & -a-i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-a+i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-a-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a-i}{a^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{-a+i}{a^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1} \begin{bmatrix} -a-i & 0 \\ 0 & -a+i \end{bmatrix}$$

$$exp(\underline{\underline{\lambda}}x) = \begin{bmatrix} exp(-ax)exp(ix) & 0 \\ 0 & exp(-ax)exp(-ix) \end{bmatrix}$$

$$exp(\underline{\underline{\lambda}}x) = exp(-ax) \begin{bmatrix} exp(ix) & 0 \\ 0 & exp(-ix) \end{bmatrix} = exp(-ax) \begin{bmatrix} cos(x)+isen(x) & 0 \\ 0 & cos(x)-isen(x) \end{bmatrix}$$

$$exp(\underline{\underline{\lambda}}x) = exp(-ax)cos(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + exp(-ax)sen(x) \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} -a+i & 0 \\ 0 & -a-i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} -a-i & 0 \\ 0 & -a+i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$exp(\underline{\underline{\lambda}}x) = exp(-ax)cos(x)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + exp(-ax)sen(x)\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^{-1} = exp(-ax)cos(x)\begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix} + exp(-ax)sen(x)\begin{bmatrix} -1/2 & i/2 \\ -1/2 & -i/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^{-1} = exp(-ax)cos(x)\underline{\underline{I}} + exp(-ax)sen(x)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}\,exp(\underline{\underline{\lambda}}x)\underline{\underline{P}}^{-1} = exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} -a+i & 0 \\ 0 & -a-i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} -a-i & 0 \\ 0 & -a+i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}\, exp(\underline{\underline{\lambda}} x)\underline{\underline{P}}^{-1} = exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{y}_0 + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}} x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

$$\underline{y} = exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}\underline{y}_0 + $$
$$+ \frac{b}{a^2+1}\left(exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix} - \underline{\underline{I}}\right)\begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1

Fase 2 : Solução com Condição Inicial - Trigonométrica

$$\underline{y} = exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}\underline{y}_0 + \frac{b}{a^2+1}\left(exp(-ax)\begin{bmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{bmatrix} - \underline{\underline{I}} \right)\begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

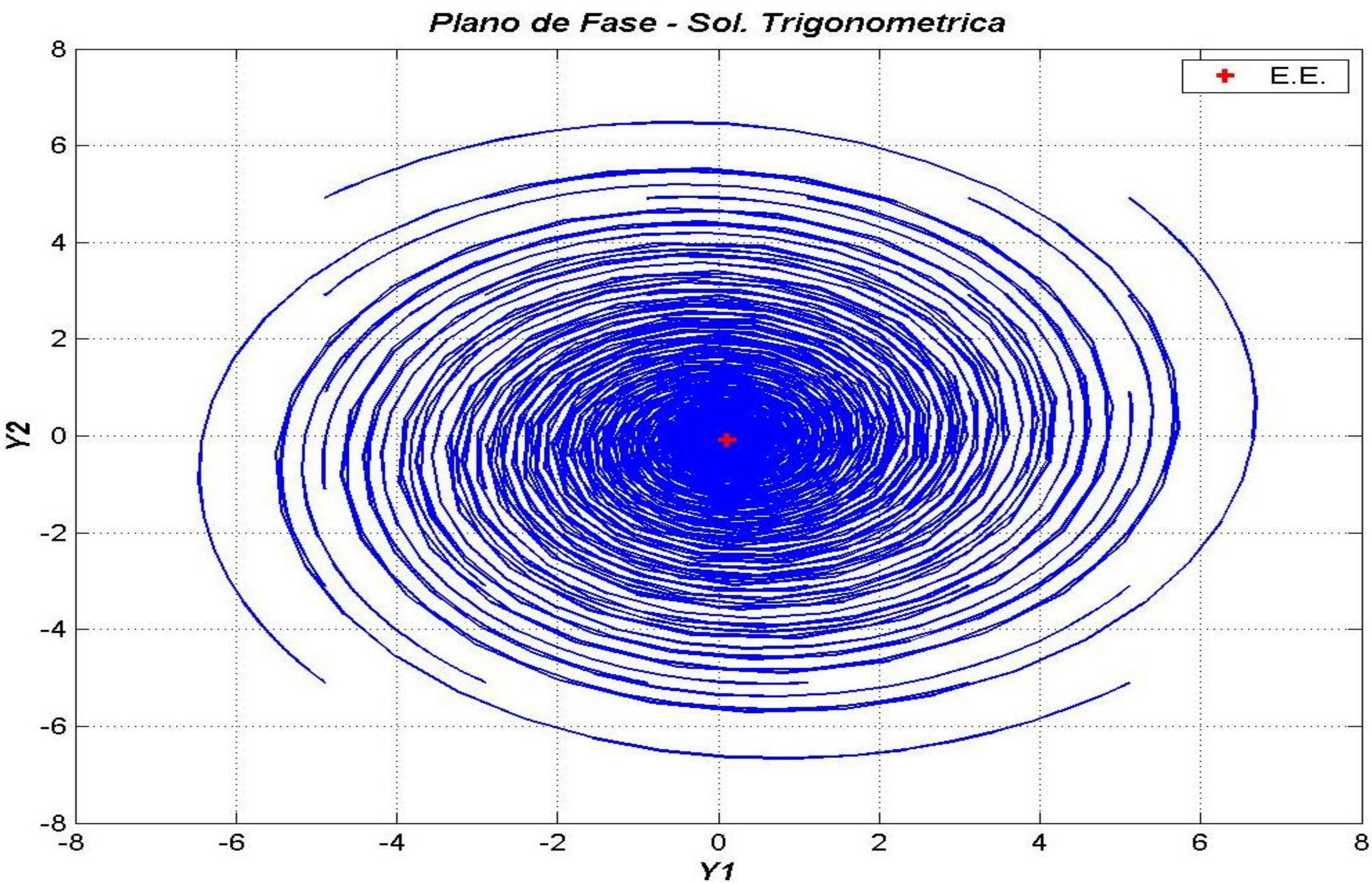
Fase 2 : Solução com Condição Inicial - Complexa

$$\underline{y} = \underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1}.\underline{y}_0 + \left(\underline{\underline{P}}\, exp\left(\underline{\underline{\lambda}}x\right)\underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{I}}\right)\underline{\underline{A}}^{-1}.\underline{U}$$

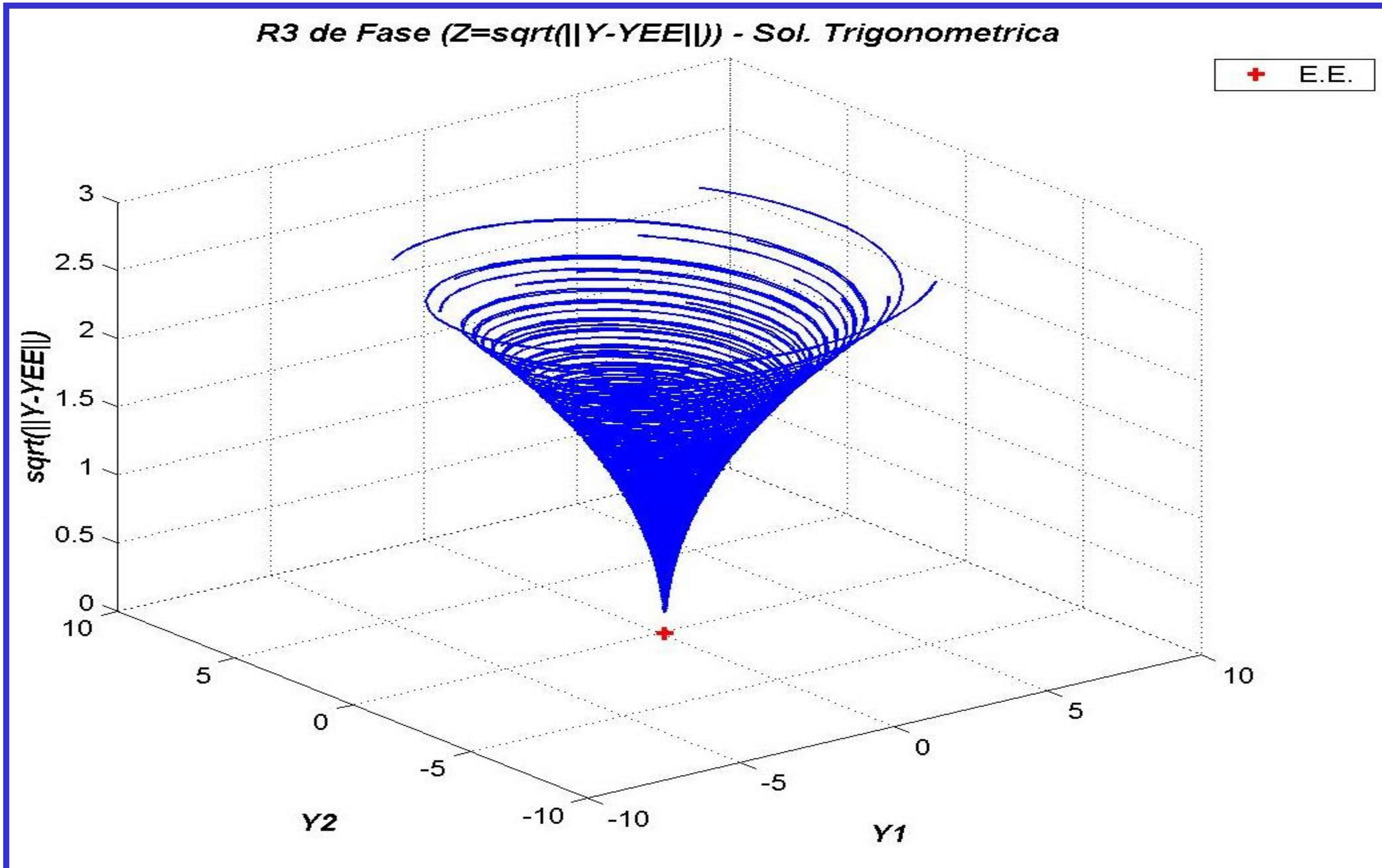
$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} -a+i & 0 \\ 0 & -a-i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

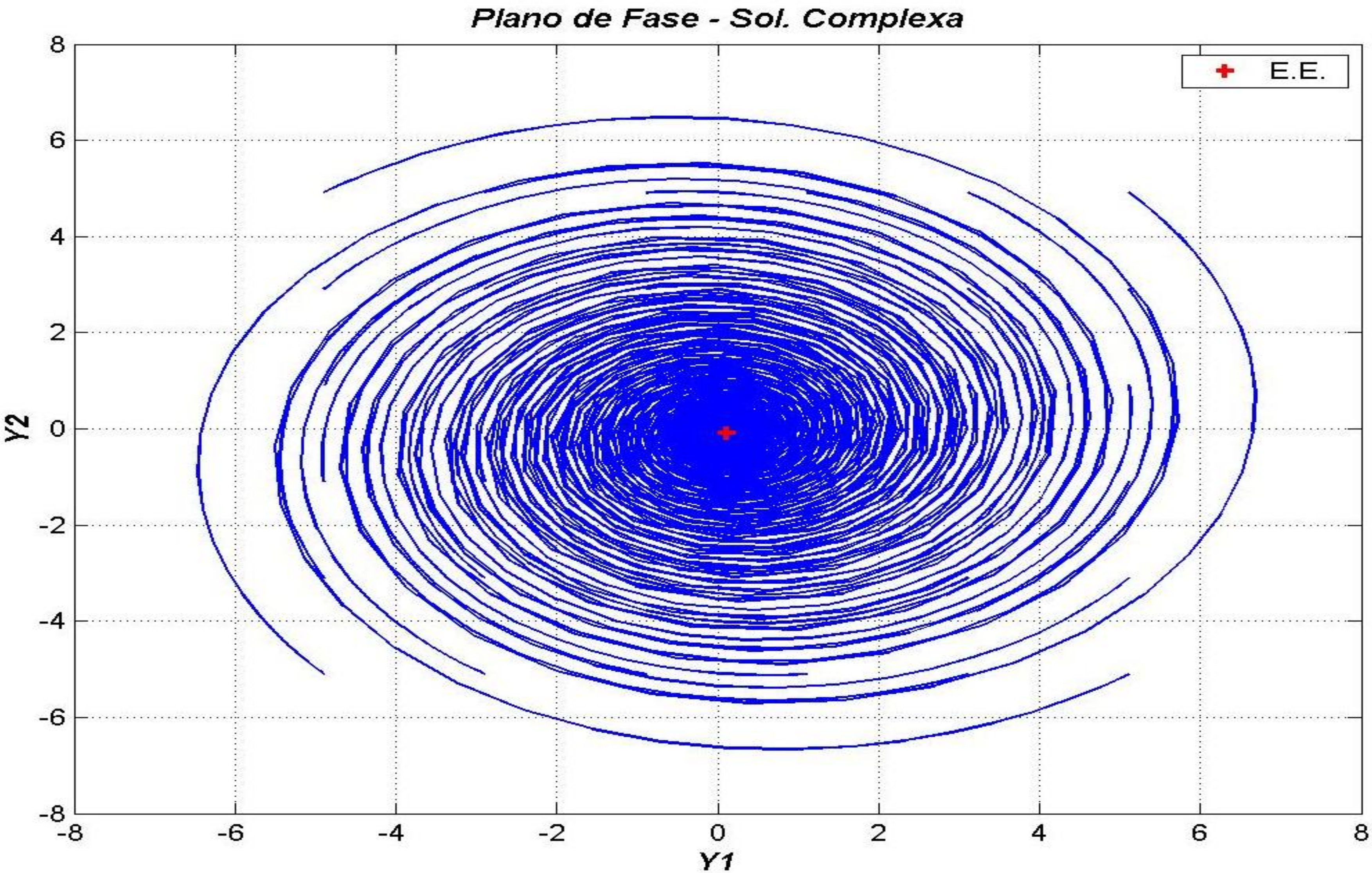
Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1



Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1



Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
3. Sistemas de EDOs Lineares de Ordem 1



Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

EDO-2 Linear Geral Não Homogênea :

$$y^{(2)} + p(x)y^{(1)} + q(x)y = r(x) \qquad (7)$$

Cuja Forma Homogênea é :

$$y^{(2)} + p(x)y^{(1)} + q(x)y = 0 \qquad (8)$$

Teorema 3.6

Seja intervalo *(a,b)* onde *p(x)*, *q(x)*, *r(x)* são contínuas. Seja $x_0 \in (a,b)$. Sejam y_0 , $y_0^{(1)}$ números. Então sobre *(a,b)* a EDO (7) tem uma e somente uma solução *y(x)* tal que :

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y^{(1)}(x_0) = y_0^{(1)}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO-2 Homogênea, Eq. (8), então $y_3(x) = C_1 y_1(x)+C_2 y2(x)$ também é solução. **Teorema 3.7**

Demonstração

$$Substituindo\ y_3(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\ no\ lado\ esquerdo\ da\ Eq.(8):$$

$$y_3^{(2)}+p(x)y_3^{(1)}+q(x)y_3=$$

$$=C_1y_1^{(2)}+C_2y_2^{(2)}+C_1p(x)y_1^{(1)}+C_2p(x)y_2^{(1)}+C_1q(x)y_1+C_2q(x)y_2=$$

$$=C_1(y_1^{(2)}+p(x)y_1^{(1)}+q(x)y_1)+C_2(y_2^{(2)}+p(x)y_2^{(1)}+q(x)y_2)=$$

$$=C_1(0)+C_2(0)$$

$$=0$$

Logo $y_3(x) = C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)$ é solução da EDO-2 homogênea.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8), para as quais $W(y_1,y_2) \neq 0$, então qualquer outra solução $y_3(x)$ pode ser escrita como $y_3(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$. **Teorema 3.8**

$$O\ wronskiano\ de\ y_1(x)\ e\ y_2(x)\ é\ W(y_1(x),y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \end{vmatrix}$$

Demonstração

Sejam a EDO-2 Linear Homogênea abaixo e duas soluções $y_1(x)$, $y_2(x)$, com $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$. Seja $y_3(x)$, uma terceira solução da EDO-2 homogênea. Podemos escrever:

$$y^{(2)} + p(x)y^{(1)} + q(x)y = 0 \quad para\ y_1(x), y_2(x), y_3(x).$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Teorema 3.8

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} + p(x)y_1^{(1)} + q(x)y_1 &= 0 \\ y_2^{(2)} + p(x)y_2^{(1)} + q(x)y_2 &= 0 \\ y_3^{(2)} + p(x)y_3^{(1)} + q(x)y_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1 \\ y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2 \\ y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trata-se de um SQH com Solução Não Trivial

$$\underline{\underline{D}} \begin{bmatrix} 1 \\ p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} = \underline{0} \text{ , como } \begin{bmatrix} 1 \\ p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow \left|\underline{\underline{D}}\right| = \begin{vmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1 \\ y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2 \\ y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$mas \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2 \leq Posto(\underline{\underline{D}}) < 3 \Rightarrow Posto(\underline{\underline{D}}) = 2$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Teorema 3.8

$$\left|\underline{\underline{D}}\right| = \begin{vmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1 \\ y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2 \\ y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad Posto(\underline{\underline{D}}) = 2 \Rightarrow \begin{matrix} \underline{\underline{D}} \text{ tem 2 linhas LI} \\ \underline{\underline{D}} \text{ tem 1 linha LD} \end{matrix}$$

$$\text{A linha LD só pode ser 3 pois } \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ i.e. linhas 1 e 2 são LI}$$

Logo :

$$\begin{bmatrix} y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y_3(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8), para as quais $W(y_1,y_2) \neq 0$, então qualquer outra solução $y_3(x)$ pode ser escrita como $y_3(x) = C_1\, y_1(x)+C_2\, y_2(x)$. **Teorema 3.8**

Observações

Para o Teor. 3.8 valer, são necessárias 2 soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ LI, i.e., com $W(y_1,y_2) \neq 0$. O Teor. não cita como obtê-las, mas é claro ao dizer que o *número máximo* de soluções LI é 2.

O Teor. 3.8 expressa que a Solução Completa (SC) da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8), é obtida como Combinação Linear de 2 soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ LI, i.e., com $W(y_1,y_2) \neq 0$. A solução SC é :

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Sol. Completa da EDO-2 Lin. Hom.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Seja $y_1(x)$ solução da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8). Então uma segunda solução $y_2(x)$, LI de $y_1(x)$, i.e. com $W(y_1,y_2) \neq 0$, pode ser obtida com $y_2(x) = \Omega(x)y_1(x)$. **Teorema 3.9**

Demonstração

$$onde \quad \Omega(x) = \int \frac{exp\left(-\int p(x).dx\right)}{\left(y_1(x)\right)^2}.dx$$

Seja a segunda solução, escrita como $y_2(x) = \Omega(x)y_1(x)$. Assim :

$$y_2(x) = \Omega(x)y_1(x)$$

$$y_2^{(1)}(x) = \Omega^{(1)}(x)y_1(x) + \Omega(x)y_1^{(1)}(x)$$

$$y_2^{(2)}(x) = \Omega^{(2)}(x)y_1(x) + 2\Omega^{(1)}(x)y_1^{(1)}(x) + \Omega(x)y_1^{(2)}(x)$$

Forçando $y_2(x)$ e derivadas a satisfazer EDO-2 Lin. Homogênea :

$$y_2^{(2)} + p(x)y_2^{(1)} + q(x)y_2 = 0$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Teorema 3.9

$$\left(\Omega^{(2)}y_1 + 2\Omega^{(1)}y_1^{(1)} + \Omega y_1^{(2)}\right) + p(x)\left(\Omega^{(1)}y_1 + \Omega y_1^{(1)}\right) + q(x)\Omega(x)y_1(x) = 0$$

$$\Omega(x)\left(y_1^{(2)} + p(x)y_1^{(1)} + q(x)y_1\right) + \Omega^{(1)}\left(2y_1^{(1)} + p(x)y_1\right) + \Omega^{(2)}y_1 = 0$$

$$Como\ \ y_1(x)\ atende\ \ à\ \ EDO:\ y_1^{(2)} + p(x)y_1^{(1)} + q(x)y_1 = 0$$

$$\Omega^{(2)} + \Omega^{(1)}\left(2\frac{y_1^{(1)}}{y_1} + p(x)\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d\Omega^{(1)}}{dx} + \Omega^{(1)}\left(2\frac{y_1^{(1)}}{y_1} + p(x)\right) = 0}$$

$$\ln \Omega^{(1)} = \int -\left(2\frac{y_1^{(1)}}{y_1} + p(x)\right)dx \Rightarrow \Omega^{(1)} = \exp\left(-2\ln(y_1) - \int p(x).dx\right)$$

$$\Omega^{(1)} = \frac{\exp\left(-\int p(x).dx\right)}{y_1^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Omega = \int \frac{\exp\left(-\int p(x).dx\right)}{y_1^2}.dx}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Teorema 3.9

A segunda solução, será escrita, portanto, como :

$$y_2(x) = \Omega(x).y_1(x), \qquad \Omega(x) = \int \frac{exp\left(-\int p(x).dx\right)}{y_1^2}.dx \tag{9}$$

É possível provar que $y_2(x)$ é LI de $y_1(x)$, isto é $W(y_2(x), y_1(x)) \neq 0$. Basta aplicar substituição direta em $W(y_2(x), y_1(x))$ com Eq. (9) ao escrever $y_2(x)$ (Ver Lista de Exercícios 3).

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Seja $y_P(x)$ solução particular da EDO-2 Linear Não-Homogênea, Eq. (7). Sejam $y_2(x)$ e $y_1(x)$ soluções da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8), com $W(y_1,y_2) \neq 0$.
Então a *Solução Completa* da EDO-2 Linear Não-Homogênea, Eq. (7), escreve-se $C_1\, y_1(x)+C_2\, y_2(x) + y_P(x)$. **Teorema 3.10**

Demonstração

$$y_H(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\ SC\ da\ EDO2\ L.H.:\ y_H^{(2)}+p(x)y_H^{(1)}+q(x)y_H=0$$

$$y_P(x)\ é\ sol.\ da\ EDO2\ L.N.Hom.:\ y_P^{(2)}+p(x)y_P^{(1)}+q(x)y_P=r(x)$$

$$y(x)\ é\ Sol.\ da\ EDO2\ L.N.Hom.:\ y^{(2)}+p(x)y^{(1)}+q(x)y=r(x)$$

Subtraindo-se as duas últimas EDOs não Homogêneas, Tem-se :

$$(y-y_P)^{(2)}+p(x)(y-y_P)^{(1)}+q(x)(y-y_P)=0$$

Teorema 3.10

$$(y-y_P)^{(2)}+p(x)(y-y_P)^{(1)}+q(x)(y-y_P)=0$$

Portanto y-y_P é solução da EDO2 Linear Homogênea. Como a Solução Completa da EDO2 L.H. é dada por y_H, tem-se

$$y-y_P=y_H(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y=y_P+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)} \qquad (10)$$

Ou seja, qualquer solução da EDO2 Linear Não-Homogênea, escreve-se nos termos da Eq. (10), a qual expressa, portanto, a *Solução Completa* da EDO-2 Linear Não-Homogênea.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
4. EDO Linear de Ordem 2

Seja $y_P(x)$ solução particular da EDO-2 Linear Não-Homogênea, Eq. (7). Sejam $y_2(x)$ e $y_1(x)$ soluções da EDO-2 Linear Homogênea, Eq. (8), com $W(y_1,y_2) \neq 0$.
Então a *Solução Completa* da EDO-2 Linear Não-Homogênea, Eq. (7), escreve-se $C_1\, y_1(x)+C_2\, y_2(x) + y_P(x)$. **Teorema 3.10**

Observação

O Teor. 3.10, formaliza que se obtém a Sol. Completa de EDO-2 Linear Não-Homogênea, com as etapas seguintes :

(1) Obter Sol. Completa da EDO-2 Linear Homogênea ($y_H(x)$)

(2) Obter Sol. Particular da EDO-2 Linear Não-Hom., ($y_P(x)$)

(3) Compor a Sol. Completa da EDO-2 Linear Não-Homogênea

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) \quad \text{ou} \quad y(x) = y_P(x) + C_1\, y_1(x)+C_2\, y_2(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

EDO-2 Linear Coef. Ctes. Não Homogênea :

$$y^{(2)} + by^{(1)} + cy = r(x) \quad (b,c\ const.) \tag{11}$$

Cuja Forma Homogênea é :

$$y^{(2)} + by^{(1)} + cy = 0 \tag{12}$$

Pelo Teor. 3.8 deverá haver duas soluções LI para compor a Solução Completa da forma homogênea, Eq. (12).
A Eq. (12) sugere que sejam tentadas soluções do tipo :

$$y = exp(\lambda x)$$

Cabe a pergunta : Para que valores de λ a função $y(x) = e^{\lambda x}$ é solução. Para responder, substituir $y(x) = e^{\lambda x}$ na Eq. (12).

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (e^{\lambda x} \neq 0)$$

$$\boxed{\lambda^2 + b\lambda + c = 0} \qquad \boxed{13}$$

A Eq. (12) é a Equação Característica da EDO-2 C.C.Hom. para os valores de λ permitidos na solução $e^{\lambda x}$. Por ser de grau 2, admitirá sempre duas raízes pelo Teor.Fund. da Álgebra. Com estas raízes λ_1 e λ_2, a Eq. (13) escreve-se:

$$\boxed{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0}$$

Levando às Soluções Candidatas da EDO-2 Homogênea, Eq. (12):

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Aplicando o teste do Wronskiano para verificar se são LI :

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \neq 0 \ \ (se\ \lambda_2 \neq \lambda_1)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}$$

Casos para S.C. da EDO-2 C.C.H.

1

$$\lambda_1 \in \Re,\ \lambda_2 \in \Re,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \ \ \textit{são LI}$$

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\boxed{y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$$

Casos para S.C. da EDO-2 C.C.H.

2

$$\lambda_1 \notin \Re,\ \lambda_2 \notin \Re,\ \lambda_1 = a+ib, \lambda_2 = a-ib \ \ complx.\ conj.$$

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}=e^{(a+ib)x}, y_2(x)=e^{\lambda_2 x}=e^{(a-ib)x} \ \ são\ LI$$

$$y_H(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}=e^{ax}\left(C_1e^{ibx}+C_2e^{-ibx}\right)$$

$$C_1 = A+iB,\ C_2 = A-iB \ \ Complx.Conj.\ \ pois \ \ y_H(x)\ real.$$

$$y_H(x)=e^{ax}\big((A+iB)(cos(bx)+isen(bx))+(A-iB)(cos(bx)-isen(bx))\big)$$

$$y_H(x)=e^{ax}\big(2Acos(bx)-2Bsen(bx)\big)$$

Após Redefinir-se as Constantes Arbitrárias Reais *A* e *B* :

$$y_H(x)= Ae^{ax}cos(bx)+Be^{ax}sen(bx)$$

$$y_1(x)=e^{ax}cos(bx)$$

$$y_2(x)=e^{ax}sen(bx)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\ y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$$

Casos para S.C. da EDO-2 C.C.H.

3 $\lambda_1=\lambda_2=\eta\in\Re\ \ (raiz\ real\ repetida)$

$Temos\ apenas\ a\ sol.\ y_1(x)=e^{\eta.x}.\ Usar\ Teor.\ 3.9\ \ para\ \ y_2(x).$

$$y_2(x)=\Omega(x).y_1(x),\ \ \Omega(x)=\int\frac{exp\left(-\int p(x).dx\right)}{y_1^2}.dx$$

Devido à raiz dupla η a Eq. característica tem a forma :

$$(\lambda-\eta)^2=0\Rightarrow\lambda^2-2\eta\lambda+\eta^2=0\Rightarrow EDO:\ y^{(2)}-2\eta y^{(1)}+\eta^2 y=0$$

$$y^{(2)}+p(x)y^{(1)}+q(x)y\ \ =0\Rightarrow p(x)=-2\eta$$

$$\Omega(x)=\int\frac{exp\left(\int 2\eta dx\right)}{exp(2\eta x)}.dx=\int dx=x$$

$$\boxed{y_2(x)=x\,exp(\eta.x)}$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Casos para S.C. da EDO-2 C.C.H.

3

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \eta \in \Re \;\; (raiz\ real\ repetida)$$

$$y_1(x) = exp(\eta . x), \quad y_2(x) = x\, exp(\eta . x)$$

$$y_H(x) = C_1\, exp(\eta . x) + C_2 x\, exp(\eta . x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

Os 3 Casos definem as possibilidades para a Solução Completa (SC) da EDO-2 com Coeficientes Constantes Homogênea :

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Resta ainda a obtenção da Solução Particular (SP) da EDO-2 com Coeficientes Constantes Não-Homogênea :

$$y^{(2)} + b y^{(1)} + c y = r(x) \quad (b, c \text{ const.}) \qquad (11)$$

Para obter SP da EDO-2 C.C.N.H. existe um punhado de métodos particulares (ex. Método de Coeficientes a Determinar) e apenas um método geral. Este último é conhecido como Método de Variação de Parâmetros (MVP). A próxima seção é dedicada ao MVP, pois este é aplicável à EDO Linear Geral.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
5. EDO Linear de Ordem 2 com Coeficientes Constantes

Após a obtenção da Solução Particular, $y_P(x)$, da EDO-2 de Ceoficientes Constantes e Não-Homogênea, Eq. (11),

$$y^{(2)} + by^{(1)} + cy = r(x) \quad (b,c\ const.) \qquad (11)$$

Tem-se a sua Solução Completa :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

O Método de Variação de Parâmetros (MVP) é um recurso útil para obter Soluções Particulares de EDOs Lineares (qualquer ordem) Não-Homogêneas. O MVP aplica-se a EDOs da forma:

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(x)y^{(k)} + P_0(x)y = R(x)$$

Os requisitos para aplicação do MVP são:
(1) A EDO é Linear e Não-Homogênea
(2) A Sol. Completa da EDO Homogênea foi obtida *($y_H(x)$)*, i.e. tem-se a Base de Soluções da EDO Lin. Homogênea *(N* é a ordem da EDO*)*:

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_N(x) \Rightarrow y_H(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n y_n(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

MVP para obter SP de EDO-2 Linear Não-Homogênea :

$$y^{(2)} + p(x)y^{(1)} + q(x)y = r(x)$$

7

#1: Disponível a Base de Soluções da EDO-2 Homogênea

$$y_1(x), y_2(x) \Rightarrow y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

#2: Forma proposta pelo MVP para a SP *($U_1(x)$ e $U_2(x)$* a obter)

$$y_P(x) = U_1(x).y_1(x) + U_2(x).y_2(x)$$

$$y_P^{(1)}(x) = U_1(x).y_1^{(1)}(x) + U_2(x).y_2^{(1)}(x) + U_1^{(1)}(x).y_1(x) + U_2^{(1)}(x).y_2(x)$$

#3: Necessárias 2 Condições para obter *$U_1(x)$* e *$U_2(x)$*. São elas

$$U_1^{(1)}.y_1 + U_2^{(1)}.y_2 = 0 \qquad (\Rightarrow y_P^{(1)} = U_1.y_1^{(1)} + U_2.y_2^{(1)})$$

$$y_P^{(2)} + p(x)y_P^{(1)} + q(x)y_P = r(x) \qquad (EDO-2)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#4: Derivadas da SP com #2 e #3

$$U_1^{(1)}.y_1 + U_2^{(1)}.y_2 = 0 \Rightarrow y_P^{(1)} = U_1.y_1^{(1)} + U_2.y_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow y_P^{(2)} = U_1.y_1^{(2)} + U_2.y_2^{(2)} + U_1^{(1)}.y_1^{(1)} + U_2^{(1)}.y_2^{(1)}$$

#5: Aplicando #4 em #3b para montar a restrição 2 a resolver

$$y_P^{(2)} + p(x)y_P^{(1)} + q(x)y_P = r(x)$$

$$U_1\left(y_1^{(2)} + p(x)y_1^{(1)} + q(x)y_1\right) + U_2\left(y_2^{(2)} + p(x)y_2^{(1)} + q(x)y_2\right) +$$

$$+ U_1^{(1)}y_1^{(1)} + U_2^{(1)}y_2^{(1)} = r(x)$$

$$y_P^{(2)} + p(x)y_P^{(1)} + q(x)y_P = r(x) \Rightarrow \boxed{U_1^{(1)}y_1^{(1)} + U_2^{(1)}y_2^{(1)} = r(x)}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#6: Reunindo restrições finais a resolver com #3a e #5 :

$$U_1^{(1)}.y_1 + U_2^{(1)}.y_2 = 0$$

$$U_1^{(1)}y_1^{(1)} + U_2^{(1)}y_2^{(1)} = r(x)$$

#7: Restrições #6 sob forma matricial para funções incógnitas

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{W}}(x)\underline{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#8: Como Wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$, a inversão abaixo é possível

$$\underline{\underline{W}}(x)\underline{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}^{(1)} = \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

#9: Com integração imprópria

$$\underline{U}(x) = \int \underline{U}^{(1)} dx \Rightarrow \underline{U}(x) = \int \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}.dx$$

#10: Expressão Final do MVP

$$\boxed{y_P(x) = U_1(x).y_1(x) + U_2(x).y_2(x)}$$

$$\boxed{\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}.dx}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#11: Abrindo a inversa da expressão Final do MVP

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} \begin{bmatrix} y_2^{(1)} & -y_2 \\ -y_1^{(1)} & y_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} .dx$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \int \frac{1}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} \begin{bmatrix} y_2^{(1)} & -y_2 \\ -y_1^{(1)} & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} .dx$$

#12: Afinal, o final do MVP para SP de EDO-2 Lin. Não-Homog.

$$U_1 = \int \frac{-r(x).y_2}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx$$

$$U_2 = \int \frac{r(x).y_1}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx$$

$$y_P(x) = U_1(x).y_1(x) + U_2(x).y_2(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

Obter a Solução Completa da EDO-2 Linear e Não-Homogênea:

$$y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = xe^{x} - e^{x}$$

Exemplo 3.3

#1: Identificando Termos da EDO-2

$$p(x) = -2,\ \ q(x) = 1,\ \ r(x) = xe^{x} - e^{x}\ \ (EDO-2 \text{ de Coef.Const. N.Hom.})$$

#2: Solução da EDO-2 Homogênea : Coeficientes Constantes

$$y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1\ \ (\text{raiz dupla})$$

$$y_1(x) = e^{x},\ \ y_2(x) = xe^{x}\ \ \Rightarrow y_H(x) = C_1.e^{x} + C_2.xe^{x}$$

#3: Wronskiano para montar MVP

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ e^{x} & xe^{x} + e^{x} \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

#4: Implementando MVP

$$U_1 = \int \frac{-r(x).y_2}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx = \int \frac{-r(x).y_2}{W(x)} dx$$

$$y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = xe^x$$

$$r(x) = xe^x - e^x$$

$$U_2 = \int \frac{r(x).y_1}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx = \int \frac{r(x).y_1}{W(x)} dx$$

$$W(x) = e^{2x}$$

$$U_1 = \int \frac{xe^x(e^x - xe^x)}{e^{2x}} dx = \int (x - x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$U_2 = \int \frac{e^x(xe^x - e^x)}{e^{2x}} dx = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#4: Implementando MVP

$$y_1(x) = e^x,\ \ y_2(x) = xe^x$$

$$r(x) = xe^x - e^x$$

$$W(x) = e^{2x}$$

$$y_P(x) = U_1(x).y_1(x) + U_2(x).y_2(x) \Rightarrow y_P(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right).xe^x$$

$$\boxed{y_P(x) = \frac{x^3 e^x}{6} - \frac{x^2 e^x}{2}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#5: Solução Completa da EDO-2 C.C. Não-Homogênea

Exemplo 3.3

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^3 e^x}{6} - \frac{x^2 e^x}{2}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

Obter a Solução Completa da EDO-2 Linear e Não-Homogênea:

$$y^{(2)} + y = tg(x)$$

Exemplo 3.4

#1: Identificando Termos da EDO-2

$$p(x) = 0, \;\; q(x) = 1, \;\; r(x) = tg(x) \;\; (EDO-2 \text{ de Coef.Const. N.Hom.})$$

#2: Solução da EDO-2 Homogênea : Coeficientes Constantes

$$y^{(2)} + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \;\; (\text{complx conj. } a = 0, b = 1)$$

$$y_1(x) = cos(x), \; y_2(x) = sen(x) \;\Rightarrow y_H(x) = C_1.cos(x) + C_2.sen(x)$$

#3: Wronskiano para montar MVP

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} = cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#4: Implementando MVP

$$U_1 = \int \frac{-r(x).y_2}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx = \int \frac{-r(x).y_2}{W(x)} dx$$

$$U_2 = \int \frac{r(x).y_1}{y_1 y_2^{(1)} - y_2 y_1^{(1)}} dx = \int \frac{r(x).y_1}{W(x)} dx$$

$$y_1(x) = cos(x)$$

$$y_2(x) = sen(x)$$

$$r(x) = tg(x)$$

$$W(x) = 1$$

$$U_1 = \int -tg(x).sen(x)dx = -\int \frac{sen^2(x)}{cos(x)} dx = -\int \frac{1}{cos(x)} dx + \int cos(x).dx$$

$$U_2 = \int tg(x).cos(x)dx = \int sen(x)dx = -cos(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= sen(x) - \int sec(x)dx = sen(x) - ln\left(sec(x) + tg(x)\right) \\ U_2 &= -cos(x) \end{aligned}}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#4: Implementando MVP

$$y_1(x) = cos(x)$$

$$y_2(x) = sen(x)$$

$$r(x) = tg(x)$$

$$W(x) = 1$$

$$y_P(x) = U_1(x).y_1(x) + U_2(x).y_2(x)$$

$$y_P(x) = \left(sen(x) - ln\left(sec(x) + tg(x)\right)\right).cos(x) - cos(x).sen(x)$$

$$\boxed{y_P(x) = -cos(x).ln\left(sec(x) + tg(x)\right)}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#5: Solução Completa da EDO-2 C.C. Não-Homogênea

Exemplo 3.4

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P$$
$$y(x) = C_1.\cos(x) + C_2.\mathrm{sen}(x) - \cos(x).\ln(\sec(x) + \mathrm{tg}(x))$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

MVP para obter SP de EDO Linear Ordem *N* Não-Homogênea :

$$y^{(N)} + p_{N-1}(x)y^{(N-1)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = r(x) \qquad \boxed{12}$$

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x)y^{(n)} = r(x)$$

#1: Disponível a Base de Soluções da EDO *O(N)* Homogênea

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad \boxed{13}$$

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x) \Rightarrow y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_N y_N(x)$$

#2: Forma proposta pelo MVP para a SP *($U_1(x)\ldots U_N(x)$ a obter)*

$$y_P(x) = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n(x) \qquad \boxed{14}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#3: Necessárias *N* Condições para $U_1(x)$, $U_2(x)$ ... $U_N(x)$. Última é a EDO-*N*, Eq. (12), em $y_P(x)$. *1ªs N-1* simplificam $y_P^{(1)}, y_P^{(2)} \ldots y_P^{(N-1)}$.

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)}(x) y_n(x) = 0 \qquad \Rightarrow y_P^{(1)} = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n^{(1)}(x)$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)}(x) y_n^{(1)}(x) = 0 \qquad \Rightarrow y_P^{(2)} = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n^{(2)}(x)$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)}(x) y_n^{(2)}(x) = 0 \qquad \Rightarrow y_P^{(3)} = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n^{(3)}(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)}(x) y_n^{(N-2)}(x) = 0 \qquad \Rightarrow y_P^{(N-1)} = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n^{(N-1)}(x)$$

$$y_P^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x) y_P^{(n)} = r(x)$$

#4: Aplicando *N-1* 1as Condições na última, EDO-*N*, Eq. (12) :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n y_n^{(N)} + \sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(N-1)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} U_n p_{N-1}(x) y_n^{(N-1)} + \ldots + \sum_{n=1}^{N} U_n p_1(x) y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{N} U_n p_0(x) y_n = r(x)$$

ou

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(N-1)} + \sum_{n=1}^{N} U_n \left(y_n^{(N)} + p_{N-1}(x) y_n^{(N-1)} + \ldots + p_1(x) y_n^{(1)} + p_0(x) y_n \right) = r(x)$$

#5: Como $y_n(x)$ $(n=1 \ldots N)$ atendem EDO-*N* Homogênea, Eq. (13), esta última condição torna-se:

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(N-1)} = r(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#6: As N Condições para $U_1(x)$, $U_2(x)$ ... $U_N(x)$ são, portanto,

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(1)} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(N-2)} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n^{(1)} y_n^{(N-1)} = r(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#7: As N Condições para $U_1(x)$, $U_2(x)$ ... $U_N(x)$ em modo matricial :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & \cdots & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & \cdots & y_N^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & y_3^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ \vdots \\ U_N^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix}$$

#8: Reconhecendo a matriz do Wronskiano e vetores $\underline{U}(x)$, $\underline{U}(x)^{(1)}$

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & \cdots & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & \cdots & y_N^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & y_3^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ \vdots \\ U_N^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#9: Resolução das *N* Condições para $U_1(x)$, $U_2(x)$ ... $U_N(x)$:

$$\left[\underline{\underline{W}}(x)\right]\underline{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}^{(1)} = \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix}$$

Inversão

$$\underline{U} = \int \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix} .dx$$

Integração

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
6. Método de Variação de Parâmetros com EDO Linear

#10: Obtendo-se $y_P(x)$ pelo MVP para EDO Linear de Ordem N

$$\boxed{y_P(x) = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n(x)}$$

$$\left\{ \underline{U} = \int \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix} .dx \right.$$

$$\boxed{y_P(x) = \underline{U}(x)^T \underline{y}(x)}$$

$$\left\{ \underline{U}(x) = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \\ U_3(x) \\ \vdots \\ U_N(x) \end{bmatrix} , \quad \underline{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{bmatrix} \right.$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

7. EDO Linear de Ordem *N* > *2* com Coeficientes Constantes

Resolução da EDO Linear Ordem *N* Não-Homogênea Geral, Eq. (12), Vem da devida generalização dos teoremas anteriores de EDO-2 Linear.

$$y^{(N)} + p_{N-1}(x)y^{(N-1)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = r(x)$$

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x)y^{(n)} = r(x) \qquad \boxed{12}$$

#1: Disponível a Base de Soluções da EDO *O(N)* Homogênea :

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad \boxed{13}$$

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x) \Rightarrow y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_N y_N(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem *N* > *2* com Coeficientes Constantes

#2: Soluções da EDO *O(N)* Hom. geram Sol. Completa somente se o Teste do Wronskiano é atendido :

$$W = \left|\underline{\underline{W}}\right| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & \cdots & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & \cdots & y_N^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & y_3^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

#3: O Teste do Wronskiano viabiliza obter Solução Particular da EDO-*N* Não-Hom. com MVP (utiliza matriz Wronskiana) :

$$y_P(x) = \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n(x) \qquad \underline{U} = \int \left[\underline{\underline{W}}(x)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} .dx$$

14

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

#4: A Solução Completa da EDO-*N* Linear Não Hom. é garantida pela generalização do Teor. 3.10 a seguir:

Seja $y_P(x)$ solução particular da EDO-*N* Linear Não-Homogênea, Eq. (12). Sejam $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_N(x)$ Base de Soluções da EDO-*N* Linear Homogênea, Eq. (13), com $W(y_1, y_2, ..., y_N) \neq 0$. Então a *Solução Completa* da EDO-*N* Linear Não-Homogênea, Eq. (12), escreve-se $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_N y_N(x) + y_P(x)$. Teorema 3.11

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n y_n(x) + \sum_{n=1}^{N} U_n(x) y_n(x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

7. EDO Linear de Ordem *N* > 2 com Coeficientes Constantes

Particularizamos a EDO-*N* Linear Não Homogênea ao caso de Coeficientes Constantes, Eq. (15) :

$$y^{(N)} + b_{N-1}y^{(N-1)} + \ldots + b_1 y^{(1)} + b_0 y = r(x) \quad , b_0, b_1, \ldots, b_{N-1} \ const.$$

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} b_n y^{(n)} = r(x) \qquad \boxed{15}$$

Iniciamos pela resolução da EDO-*N* Coef. Const. Homogênea :

$$y^{(N)} + b_{N-1}y^{(N-1)} + \ldots + b_1 y^{(1)} + b_0 y = 0$$

$$y^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} b_n y^{(n)} = 0 \qquad \boxed{16}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem *N* > 2 com Coeficientes Constantes

A resolução da EDO-*N* Coef. Const. Hom. vem com a proposta

$$\boxed{y(x) = exp(\lambda x)}$$

Substituindo na EDO-*N* Coef. Const. Homogênea, Eq. (16),

$$\left(\lambda^N + b_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0\right) . exp(\lambda x) = 0$$

Resulta a Equação Característica da EDO-*N* C.C. Hom., Eq. (17),

$$\lambda^N + b_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0 \qquad \boxed{17}$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio de grau *N* da Eq. (17), sempre terá *N* raízes :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

Como no caso de Ordem 2, valores distintos de raízes λ corresponderão automaticamente a soluções LI conforme:

$$y_n(x) = exp(\lambda_n x)$$

Os valores complexos de raízes λ ocorrerão em pares conjugados.

Os casos de raízes repetidas, reais ou complexas (estas sempre em pares conjugados), deverão acarretar sucessivas multiplicações por x (x na primeira repetição, x^2 na segunda repetição, etc) das funções $exp(\lambda x)$ para garantir a natureza LI dos membros da Base de Soluções da EDO-N C.C. Homogênea.

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem *N* > *2* com Coeficientes Constantes

Exemplo : *N=10* e as seguintes raízes da Eq. Carac., Eq. (17) :

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_B, \lambda_B, \lambda_{C_1}, \lambda_{C_2}, \lambda_{C_1}, \lambda_{C_2}, \lambda_D, \lambda_D \quad \begin{cases} \lambda_A, \lambda_B, \lambda_D \in \Re \\ \lambda_{C_1} = a + ib \notin \Re,\ \lambda_{C_2} = a - ib \notin \Re \end{cases}$$

Base Sols. da EDO-*N* C.C.Hom.

$$y_1(x) = exp(\lambda_A x)$$

$$y_2(x) = exp(\lambda_B x), \qquad y_3(x) = x\,exp(\lambda_B x), \qquad y_4(x) = x^2\,exp(\lambda_B x)$$

$$y_5(x) = exp(ax)cos(bx), \qquad y_6(x) = exp(ax)sen(bx)$$

$$y_7(x) = x\,exp(ax)cos(bx), \qquad y_8(x) = x\,exp(ax)sen(bx)$$

$$y_9(x) = exp(\lambda_D x), \qquad y_{10}(x) = x\,exp(\lambda_D x)$$

Sol. Completa EDO-*N* C.C. Hom.

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_A x} + C_2 e^{\lambda_B x} + C_3 x e^{\lambda_B x} + C_4 x^2 e^{\lambda_B x} + C_5 e^{ax}cos(bx) + C_6 e^{ax}sen(bx) + C_7 x e^{ax}cos(bx) + C_8 x e^{ax}sen(bx) + C_9 e^{\lambda_D x} + C_{10} x e^{\lambda_D x}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

Obter a Solução Completa da EDO C.C. Não-Homogênea:

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = -sen(2x)$$

Exemplo 3.5

#1: Resolvendo EDO C.C. Homogênea

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$$

#2: Raízes da Eq. Característica

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \ (dupla)$$

#3: Base de Soluções e S.C. da EDO C.C. Homogênea :

$$y_1(x) = cos(2x), \quad y_2(x) = sen(2x)$$

$$y_3(x) = x\,cos(2x), y_4(x) = x\,sen(2x)$$

$$y_H(x) = C_1 cos(2x) + C_2 sen(2x) + C_3 x\,cos(2x) + C_4 x\,sen(2x)$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

#4: Montando S.P. via MVP

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} \cos(2x) & sen(2x) & x\cos(2x) & xsen(2x) \\ -2sen(2x) & 2\cos(2x) & \cos(2x)-2xsen(2x) & sen(2x)+2x\cos(2x) \\ -4\cos(2x) & -4sen(2x) & -4sen(2x)-4x\cos(2x) & 4\cos(2x)-4xsen(2x) \\ 8sen(2x) & -8\cos(2x) & -12\cos(2x)+8xsen(2x) & -12sen(2x)-8x\cos(2x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \int \left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} .dx = \int \left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -sen(2x) \end{bmatrix} .dx$$

#5: Inversa de W via Matriz de Cofatores Transposta

$$\left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1} = \frac{1}{\left|\underline{\underline{W}}\right|}\begin{bmatrix} \underline{\Omega}\big|_1^T \\ \underline{\Omega}\big|_2^T \\ \underline{\Omega}\big|_3^T \\ \underline{\Omega}\big|_4^T \end{bmatrix}^T = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} \underline{\Omega}\big|_1 & \underline{\Omega}\big|_2 & \underline{\Omega}\big|_3 & \underline{\Omega}\big|_4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} = \frac{r(x)}{W}\underline{\Omega}\big|_4$$

Necessário calcular apenas os cofatores da linha 4 de W

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem *N* > 2 com Coeficientes Constantes

$$\Omega_{41} = -\begin{vmatrix} sen(2x) & x\cos(2x) & xsen(2x) \\ 2\cos(2x) & \cos(2x)-2xsen(2x) & sen(2x)+2x\cos(2x) \\ -4sen(2x) & -4sen(2x)-4x\cos(2x) & 4\cos(2x)-4xsen(2x) \end{vmatrix} = -4sen(2x)+8x\cos(2x)$$

$$\Omega_{42} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & x\cos(2x) & xsen(2x) \\ -2sen(2x) & \cos(2x)-2xsen(2x) & sen(2x)+2x\cos(2x) \\ -4\cos(2x) & -4sen(2x)-4x\cos(2x) & 4\cos(2x)-4xsen(2x) \end{vmatrix} = 4\cos(2x)+8xsen(2x)$$

$$\Omega_{43} = -\begin{vmatrix} \cos(2x) & sen(2x) & xsen(2x) \\ -2sen(2x) & 2\cos(2x) & sen(2x)+2x\cos(2x) \\ -4\cos(2x) & -4sen(2x) & 4\cos(2x)-4xsen(2x) \end{vmatrix} = -8\cos(2x)$$

$$\Omega_{44} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & sen(2x) & x\cos(2x) \\ -2sen(2x) & 2\cos(2x) & \cos(2x)-2xsen(2x) \\ -4\cos(2x) & -4sen(2x) & -4sen(2x)-4x\cos(2x) \end{vmatrix} = -8sen(2x)$$

$$W = W_{41}\Omega_{41} + W_{42}\Omega_{42} + W_{43}\Omega_{43} + W_{44}\Omega_{44}$$

$$W = 8sen(2x)\Omega_{41} - 8\cos(2x)\Omega_{42} + (-12\cos(2x)+8xsen(2x))\Omega_{43}$$
$$+(-12sen(2x)-8x\cos(2x))\Omega_{44}$$

$$\boxed{W = 64}$$

#6: Operando MVP

$$\Omega_{41} = -4sen(2x) + 8x\cos(2x),\ \Omega_{42} = 4\cos(2x) + 8xsen(2x)$$

$$\Omega_{43} = -8\cos(2x) \qquad ,\ \Omega_{44} = -8sen(2x)$$

$$\left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} = \frac{r(x)}{W}\underline{\Omega}\Big|_4 = -\frac{sen(2x)}{64}\begin{bmatrix} -4sen(2x) + 8x\cos(2x) \\ 4\cos(2x) + 8xsen(2x) \\ -8\cos(2x) \\ -8sen(2x) \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{sen^2(2x) - 2xsen(2x)\cos(2x)}{16} \\ \dfrac{-sen(2x)\cos(2x) - 2xsen^2(2x)}{16} \\ \dfrac{sen(2x)\cos(2x)}{8} \\ \dfrac{sen^2(2x)}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos(4x)}{32} - \dfrac{xsen(4x)}{16} \\ -\dfrac{sen(4x)}{32} - \dfrac{x(1-\cos(4x))}{16} \\ \dfrac{sen(4x)}{16} \\ \dfrac{1-\cos(4x)}{16} \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

$$\underline{U} = \int \left[\underline{\underline{W}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int \frac{1-\cos(4x)}{32} dx - \int \frac{x sen(4x)}{16} dx \\ -\int \frac{sen(4x)}{32} dx - \int \frac{x(1-\cos(4x))}{16} dx \\ \int \frac{sen(4x)}{16} dx \\ \int \frac{1-\cos(4x)}{16} dx \end{bmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{x}{32} - \frac{sen(4x)}{128} + \frac{x\cos(4x)}{64} - \frac{sen(4x)}{256} \\ \frac{\cos(4x)}{128} - \frac{x^2}{32} + \frac{\cos(4x)}{256} + \frac{x sen(4x)}{64} \\ -\frac{\cos(4x)}{64} \\ \frac{x}{16} - \frac{sen(4x)}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{32} - \frac{3 sen(4x)}{256} + \frac{x\cos(4x)}{64} \\ -\frac{x^2}{32} + \frac{3\cos(4x)}{256} + \frac{x sen(4x)}{64} \\ -\frac{\cos(4x)}{64} \\ \frac{x}{16} - \frac{sen(4x)}{64} \end{bmatrix}$$

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)
7. EDO Linear de Ordem $N > 2$ com Coeficientes Constantes

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{x}{32} - \frac{3sen(4x)}{256} + \frac{x\cos(4x)}{64} \\ -\frac{x^2}{32} + \frac{3\cos(4x)}{256} + \frac{xsen(4x)}{64} \\ -\frac{\cos(4x)}{64} \\ \frac{x}{16} - \frac{sen(4x)}{64} \end{bmatrix}$$

$$y_P = \left(\frac{x}{32} - \frac{3sen(4x)}{256} + \frac{x\cos(4x)}{64}\right)\cos(2x) + \left(-\frac{x^2}{32} + \frac{3\cos(4x)}{256} + \frac{xsen(4x)}{64}\right)sen(2x) +$$
$$\left(-\frac{\cos(4x)}{64}\right)x\cos(2x) + \left(\frac{x}{16} - \frac{sen(4x)}{64}\right)xsen(2x)$$

$$y_P = \frac{x}{32}\cos(2x) + \frac{x^2}{32}sen(2x) - \frac{3}{256}sen(2x) \Rightarrow \quad \boxed{y_P = \frac{x^2}{32}sen(2x)}$$

Por quê ?

Cap. III : Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

7. EDO Linear de Ordem *N* > *2* com Coeficientes Constantes

Solução Completa da EDO C.C. Não-Homogênea:

Exemplo 3.5

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = -sen(2x)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = C_1 cos(2x) + C_2 sen(2x) + \\ + C_3 x\,cos(2x) + C_4 x\,sen(2x) \\ + \frac{x^2}{32} sen(2x)$$